
PROGRAMME DE COLLE POUR LA SEMAINE DU 1 DÉCEMBRE

MATHÉMATIQUES MPSI : SEMAINE 10

1. Limite d'une suite réelle : révision du programme précédent.

Exemple d'étude de suite définie implicitement.

2. Limite d'une suite complexe :

Brève extension des résultats sur les suites réelles.

Une suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.

Convergence de $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de q .

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

3. Arithmétique dans \mathbb{Z} (partie 1)

(a) Relation de divisibilité. Propriétés élémentaires. Couples d'entiers associés. Division euclidienne dans \mathbb{Z} .

Congruences dans \mathbb{Z} : règles opératoires.

(b) Définition du PGCD de deux entiers relatifs.

Lemme : $a \wedge b = b \wedge r$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b .

Algorithme d'Euclide.

Relation de Bézout, calcul pratique de coefficients de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.

Quelques propriétés du PGCD : d est un diviseur commun de a et $b \iff d$ divise $a \wedge b$
pour $k \in \mathbb{N}$, $(ka) \wedge (kb) = k \times (a \wedge b)$

Couples d'entiers premiers entre eux. Théorème de Bézout, corollaires. Théorème de Gauss.

Prop : soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, soit $d \in \mathbb{N}$.

$d = a \wedge b \iff$ il existe $(a', b') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = da'$, $b = db'$ et $a' \wedge b' = 1$

Forme irréductible d'un nombre rationnel.

QUESTIONS DE COURS OU EXERCICE TYPE

La colle pourra débuter par une démonstration de cours, ou un exercice type.

— Corollaire 1 du théorème de Bézout :

Si un entier est divisible par deux entiers premiers entre eux, alors il est divisible par leur produit

— Corollaire 2 du théorème de Bézout :

Si un entier est premier avec deux autres, alors il est premier avec leur produit

— Énoncé et démonstration du théorème de Gauss.

— Exercice type : résolution dans \mathbb{Z}^2 d'une équation de la forme $ax + by = c$ (comme par exemple $19x + 31y = 5$)