Programme de colle pour la semaine du 8 décembre

mathématiques MPSI : semaine 11

1. **Arithmétique :** divisibilité, PGCD (révision du programme précédent).

   Quelques propriétés du PPCM : m est un multiple commun de a et $b \Longleftrightarrow m$ est un multiple de $a \vee b$
   Lien entre PGCD et PPCM : $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$

2. **Nombres premiers**
   Premières propriétés.
   Tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.
   Il y a une infinité de nombres premiers.
   Décomposition d'un entier naturel en produit de nombres premiers. Valuation p-adique.
   Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p-adiques.
   Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p-adiques.
   Petit théorème de Fermat.

3. **Limite d'une fonction en un point :**
   Définitions. Premières propriétés.
   Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction en un point. Opérations sur les limites.
   Passage à la limite dans les inégalités.
   Théorème d'encadrement, théorème de minoration, théorème de majoration.
   Théorème de la limite monotone.

4. **Continuité :**
   Continuité d'une fonction en un point. Continuité à droite, continuité à gauche.
   Continuité sur un intervalle.
   Prolongement par continuité en un point.
   Opérations sur les fonctions continues.
   Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

   Théorème des valeurs intermédiaires :
   <u>énoncé 1 :</u> si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue avec $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
   <u>corollaire :</u> toute fonction continue sur un intervalle qui ne s'annule pas est de signe constant
   <u>énoncé 2 :</u> Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si $(a, b) \in I^2$, alors pour toute valeur k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in I$ tel que $f(c) = k$.

QUESTIONS DE COURS

— Démonstration de la proposition : si m est un multiple commun de a et b, alors m est un multiple de $a \vee b$

— Démonstration de la proposition : tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

— Démonstration de la proposition : si p est un nombre premier, alors $\forall n \in \mathbb{Z} \quad n^p \equiv n \ [p]$

preuve en deux étapes :
• *démonstration par récurrence de la proposition " $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^p \equiv n \ [p]$ " en utilisant le résultat que si p est premier, alors p divise $\binom{p}{k}$ (où $k \in [\![1, p-1]\!]$)*
• *démonstration du résultat pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$*