## Programme de colle pour la semaine du 5 janvier

### mathématiques MPSI : semaine 13

1. **Structures algébriques usuelles**
   (a) **Loi de composition interne**
   Associativité, commutativité, distributivité. Partie stable, loi induite.
   Élément neutre, élément symétrisable ou inversible. Éléments itérés.
   (b) **Structure de groupe**
   Groupe. Exemples usuels. Sous-groupe. Morphisme de groupes.
   (c) **Structures d'anneau et de corps**
   Anneau. Exemples usuels. Calcul dans un anneau. Anneau intègre. Sous-anneau. Corps. Sous-corps. Morphisme d'anneaux.

2. **Opérations sur les matrices :**
   Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Addition, multiplication par un scalaire. Combinaisons linéaires.
   Matrices élémentaires. Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
   Produit matriciel. Propriétés : associativité, bilinéarité.
   Produit de deux matrices élémentaires.
   Transposée d'une matrice. Opérations sur les transposées.

3. **Systèmes linéaires**
   Vocabulaire relatif aux systèmes linéaires : système compatible, incompatible, homogène, échelonné ...
   Algorithme du pivot de Gauss.

4. **Anneau des matrices carrées**
   Règles de calculs. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents. Formule du binôme.
   Matrices scalaires, diagonales, triangulaires supérieures (ou inférieures), symétriques, antisymétriques.
   Produit de deux matrices diagonales, de deux matrices triangulaires supérieures (ou inférieures).

   Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.
   Inverse d'une transposée.
   $A$ est inversible si et seul. si pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = Y$.
   Calcul de l'inverse d'une matrice $A$ par résolution du système $AX = Y$.
   Condition suffisante de non inversibilité : si une colonne (resp. ligne) de $A$ est combinaison linéaire des autres colonnes (lignes) ou est nulle, alors $A$ n'est pas inversible.
   Interprétation matricielle des opérations élémentaires en termes de produit matriciel.
   Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité. Application au calcul de l'inverse.
   Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire.
   L'inverse d'une matrice triangulaire inférieure $A$ est triangulaire inférieure et de coefficients diagonaux les inverses de ceux de $A$.