Programme de colle pour la semaine du 13 janvier

mathématiques MPSI : semaine 14

1. **Dérivabilité :**
   Dérivabilité en un point, dérivabilité à gauche, à droite.
   La dérivabilité entraîne la continuité.
   Opérations sur les fonctions dérivables et dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.
   Fonctions k-fois dérivable, de classe C^k, de classe C^∞.
   Opérations sur les fonctions de classe C^k : combinaison, linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.
   Dérivées successives des fonctions $x \mapsto x^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto e^{\lambda x}$, ln, cos, sin, ch et sh.

2. **Propriétés des fonctions dérivables :**
   Extremum local et dérivée.
   Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis.
   Monotonie des fonctions dérivables.
   Inégalité des accroissements finis. Fonction lipschitzienne.
   Théorème de la limite de la dérivée.

QUESTIONS DE COURS

La colle pourra débuter par une démonstration de cours :

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $a \in I$ tel que a ne soit pas une extrémité de I.
   Montrer que si f présente un extremum local en a et si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

2. Énoncé et démonstration du théorème de Rolle

3. soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
   Prouver l'équivalence : $f' \geq 0 \Longleftrightarrow f$ est croissante.

4. Démonstration du théorème de la limite de la dérivé : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$.