Programme de colle pour la semaine du 26 janvier

mathématiques MPSI : semaine 16

1. **Généralités sur les polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$**

   Degré, coefficient dominant, dérivation ... (révision du programme précédent)

2. **Racines d'un polynôme**

   Racine d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.

   Si α_1, α_2, ..., α_n sont des racines distinctes de P, alors $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ divise P.

   Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

   Si α_1, α_2, ..., α_n sont des racines distinctes de P et $\deg(P)=n$, alors les polynômes P et $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ sont associés.

   Multiplicité d'une racine. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.
   Si α_1, α_2, ..., α_r sont des racines distinctes de P d'ordre de multiplicité respectivement m_1, m_2, ... m_r, alors $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{m_i}$ divise P.

3. **Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$:**

   PGCD de deux polynômes, algorithme d'Euclide. Relation de Bézout.
   Polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Corollaires. Théorème de Gauss.
   PPCM de deux polynômes.
   PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble.

4. **Polynômes irréductibles et factorisation :**

   Théorème de d'Alembert-Gauss.
   Conséquences : tout polynôme non constant est scindé sur $\mathbb{C}$, le nombre de racines (dans $\mathbb{C}$) comptées avec leur ordre de multiplicité d'un polynôme non nul est égal à son degré.

   Relations entre racines et coefficients d'un polynôme scindé : formules de Viète.

   Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Factorisation de X^n-1 dans $\mathbb{C}[X]$.

   Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
   Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont la même multiplicité.
   Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
   Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$:

   $A=\lambda\prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)^{m_i}$ divise B si et seulement si pour tout $i\in[\![1\,,\,k]\!]$ α_i est une une racine de B d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à m_i
   Deux polynômes sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$.