Question 2 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 2\Big(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)\Big)+\Big(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)\Big)\Big(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)\Big)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 2+x+\Big(-1-\frac{1}{2}+1\Big)x^2+\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Big)x^3+\Big(\frac{1}{12}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\Big)x^4+\mathrm{o}(x^4)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 2+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{12}+\mathrm{o}(x^4)$$

Question 3 :

$\dfrac{e^t}{1+t^2}$ **est négligeable devant** e^t lorsque t tend vers $+\infty$ (*le quotient* $\dfrac{1}{1+t^2}$ *tend vers 0 lorsque* t *tend vers* $+\infty$)

$\dfrac{e^t}{1+t^2}$ **est négligeable devant** $\dfrac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ (*le quotient* $\dfrac{t}{1+t^2}$ *tend vers 0 lorsque* t *tend vers* $+\infty$)

$\dfrac{e^t}{1+t^2}$ **est équivalente à** $\dfrac{e^t}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$ (*le quotient* $\dfrac{t^2}{1+t^2}$ *tend vers 1 lorsque* t *tend vers* $+\infty$)

Question 4 :

a) $\boxed{\ln(1+2x^3) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x^3}$ *Justification :* on utilise l'équivalent usuel $\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ avec $t=2x^3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

b) $\boxed{\dfrac{e^{3x}}{\sin^4(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^4}}$ *Justification :* comme $e^{3x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, alors $e^{3x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\sin^4(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^4$

c) $\boxed{\sqrt{1+\dfrac{9}{x^4}}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{3}{x^2}}$

Justification : $\sqrt{1+\dfrac{9}{x^4}}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0, donc 1 est négligeable devant $\sqrt{1+\dfrac{9}{x^4}}$ au voisinage de 0. De plus, $1+\dfrac{9}{x^4} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{9}{x^4}$, donc $\sqrt{1+\dfrac{9}{x^4}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{3}{x^2}$.

d) $\boxed{x-\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{6}}$ *En effet,* $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)$, *d'où* $x-\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)$

e) $\boxed{x^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x)}$

Justification : on rappelle que $x^x=e^{x\ln(x)}$; on utilise alors l'équivalent usuel $e^t-1 \underset{t\to 0}{\sim} t$ avec $t=x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

f) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^x-1}{x} = -\infty}$ *Justification :* $\dfrac{x^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$

deux termes équivalents ont le même comportement limite

g) $\boxed{\sqrt{\dfrac{9}{x^2}+1}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{9}{2x^2}}$ *Justification :* on utilise l'équivalent usuel $\sqrt{1+t}-1 \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{2}$ avec $t=\dfrac{9}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$