

## CORRECTION D'EXERCICES DU TD 16

### 1. Exercice 1 :

- Comme  $[t] \leq t < [t] + 1$ , on a :  $0 \leq t - [t] < 1$ .

Les nombres  $\delta_k$  appartiennent à l'ensemble  $[0, 1[$ .

On peut séparer l'ensemble  $[0, 1[$  en  $n$  intervalles disjoints :

$$[0, 1[ = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right[ = \left[ 0, \frac{1}{n} \right[ \cup \left[ \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[ \cup \cdots \cup \left[ \frac{n-1}{n}, 1 \right[$$

Comme il y a  $(n+1)$  nombres  $\delta_k$  et  $n$  ensembles  $\left[ \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right[$ , d'après le principe des tiroirs, un des ces ensembles contient au moins deux de ces nombres.

- Notons  $k$  et  $l$  deux entiers de  $\llbracket 0, n \rrbracket$  tels que  $k > l$  et  $\delta_k$  et  $\delta_l$  appartiennent au même ensemble  $\left[ \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right[$ .

On a :  $|\delta_k - \delta_l| < \frac{1}{n}$        $\frac{1}{n}$  est l'amplitude de cette intervalle

Ce qui donne :  $\left| (k-l)x - (\lfloor kx \rfloor - \lfloor lx \rfloor) \right| < \frac{1}{n}$

Puis :  $\left| x - \frac{\lfloor kx \rfloor - \lfloor lx \rfloor}{k-l} \right| < \frac{1}{n(k-l)}$

On pose  $p = \lfloor kx \rfloor - \lfloor lx \rfloor$  et  $q = k-l$ .

Comme  $0 \leq l < k \leq n$ , on a bien  $q \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$p \in \mathbb{Z}$  et  $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}$

### 2. Exercice 2 :

On écrit chaque nombre  $a$  de  $A$  sous la forme  $a = 2^p m$  où  $m$  est un nombre impair compris entre 1 et  $2n-1$ . Puisqu'il y a  $n+1$  nombres dans  $A$ , mais seulement  $n$  composantes impaires différentes, il doit y avoir deux nombres de  $A$  de même composante impaire. Par conséquent, l'un est multiple de l'autre.

Ce résultat n'est plus vrai si l'on remplace  $n+1$  par  $n$  : il suffit de considérer l'ensemble  $A = \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ .

### 3. Exercice 3 :

Le nombre de sous-ensembles non vides de  $E$  est  $2^{10} - 1 = 1023$ .

Pour un sous-ensemble  $F$  non vide de  $E$  donné, on note  $S(F)$  la somme des éléments de  $F$ .

On a l'encadrement suivant :

$$1 \leq S(F) \leq \sum_{k=91}^{100} k = 955$$

Il y a donc plus de sous-ensembles non vides de  $E$  que de sommes possibles.

Il existe donc deux sous-ensembles distincts non vides  $F_1$  et  $F_2$  de  $E$  telles que  $S(F_1) = S(F_2)$ .

Les deux sous-ensembles ne sont pas nécessairement disjoints.

On pose alors  $F'_1 = F_1 \setminus (F_1 \cap F_2)$  et  $F'_2 = F_2 \setminus (F_1 \cap F_2)$ .

$F'_1$  et  $F'_2$  sont ainsi deux ensembles disjoints non vides tels que  $S(F'_1) = S(F'_2)$ .

On donne un exemple d'un ensemble  $E$  de 8 nombres entiers compris entre 1 et 100 pour lequel il n'existe pas de parties de  $E$  non vides et disjointes ayant la même somme :  $E = \{22, 44, 81, 84, 86, 88, 92, 98\}$ .

On donne ci-dessous la liste des résultats (rangés par ordre croissant) des sommes qu'on peut obtenir à partir des  $2^8 - 1 = 255$  parties non vides de  $E$  :

[22, 44, 66, 81, 84, 86, 88, 92, 98, 103, 106, 108, 110, 114, 120, 125, 128, 130, 132, 136, 142, 147, 150, 152, 154, 158, 164, 165, 167, 169, 170, 172, 173, 174, 176, 178, 179, 180, 182, 184, 186, 187, 189, 190, 191, 192, 194, 195, 196, 198, 200, 201, 202, 204, 206, 208, 209, 211, 212, 213, 214, 216, 217, 218, 220, 222, 223, 224, 226, 228, 230, 231, 233, 234, 235, 236, 238, 239, 240, 242, 244, 245, 246, 248, 250, 251, 252, 253, 255, 256, 257, 258, 259, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 336, 337, 338, 339, 340, 342, 343, 344, 345, 347, 349, 350, 351, 353, 355, 356, 357, 359, 360, 361, 362, 364, 365, 367, 369, 371, 372, 373, 375, 377, 378, 379, 381, 382, 383, 384, 386, 387, 389, 391, 393, 394, 395, 397, 399, 400, 401, 403, 404, 405, 406, 408, 409, 411, 413, 415, 416, 417, 419, 421, 422, 423, 425, 426, 428, 430, 431, 437, 441, 443, 445, 448, 453, 459, 463, 465, 467, 470, 475, 481, 485, 487, 489, 492, 497, 503, 507, 509, 511, 514, 529, 551, 573, 595]

On obtient 255 résultats distincts deux à deux, il n'existe donc pas de parties non vides de  $E$  qui soient distinctes et qui aient la même somme.

4. **Exercice 4 :**

Soient  $(x_1, x_2) \in A^2$  tel que  $f(x_1) = f(x_2)$ .

$$ax_1 = ax_2$$

$$a(x_1 - x_2) = 0_A$$

Comme l'anneau est intègre et  $a \neq 0_A$ , on déduit que  $x_1 - x_2 = 0_A$

Ainsi,  $x_1 = x_2$ . L'application  $f$  est injective.

Comme de plus, l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont des ensembles finis de même cardinal, on déduit que  $f$  est bijective.

Il existe donc  $b \in A$  tel que  $f(b) = 1_A$ .

La loi étant commutative, on a  $ba = ab = 1_A$ .

$a$  est donc inversible.

Tout élément non nul de  $A$  étant inversible, on déduit que l'anneau est un corps.

5. **Exercice 6 :**

*Face à un tel exercice de dénombrement, il est bon de se poser dès à présent la question de l'ordre : l'ordre dans lequel nous effectuons les choix doit-il être pris en compte ? Ici, la réponse est négative : seule la composition du jury importe et pas l'ordre dans lequel ses membres ont été désignés. Nous devons compter des choix sans ordre et utiliserons, en conséquence, des coefficients binomiaux.*

a) Pour désigner les scientifiques, nous avons 2 choix parmi 5 (et l'ordre n'a pas d'importance).

$$\text{Il y a donc } \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ choix possibles.}$$

Pour désigner les littéraires, nous avons 3 choix parmi 7 (et l'ordre n'a pas d'importance).

$$\text{Il y a donc } \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35 \text{ choix possibles.}$$

Finalement, il y a  $\binom{5}{2} \binom{7}{3} = 350$  façons de constituer le jury.

b) L'un des scientifiques a déjà été désigné. Il reste donc à choisir 1 parmi les 4 scientifiques restants. Cela nous laisse 4 choix.

Le nombre de choix de littéraires est inchangé et, finalement, il y a  $4 \times 35 = 140$  façons de constituer le jury.

c) Considérons les deux littéraires qui ne peuvent pas appartenir ensemble au jury.

Si le premier y appartient, mais pas le second, il reste 2 littéraires à choisir parmi les 5 restants. Nous avons donc  $\binom{5}{2} = 10$  choix.

De même, si le second littéraire appartient au jury, mais pas le premier, il y a  $\binom{5}{2} = 10$  façons de choisir les littéraires restants.

*Attention, l'énoncé ne demande pas que l'un des deux littéraires donnés appartiennent nécessairement au jury. Il ne faut donc pas oublier le cas où aucun des deux n'y appartient.*

Enfin, si aucun des deux n'appartient au jury, il reste à en choisir 3 parmi les 5 restants. Nous avons donc

$$\binom{5}{3} = 10 \text{ choix.}$$

$$\text{Il y a donc } \binom{5}{2} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 30 \text{ façons de choisir les littéraires du jury.}$$

Le nombre de façons de choisir les scientifiques est toujours égal à 10, et nous avons donc finalement  $30 \times 10 = 300$  façons de constituer le jury.

**Autre solution :** nous pouvons également dénombrer le complémentaire de l'ensemble qui nous intéresse : les jury auxquels appartiennent les deux littéraires. Il y a toujours 10 façons de choisir les scientifiques. Le jury est ensuite formé des deux littéraires auxquels s'ajoute un troisième littéraire (5 choix possibles). Il y a donc  $10 \times 5 = 50$  façons de constituer les jurys auxquels appartiennent les deux littéraires.

Puisque d'après la première question, il y a 350 jurys possibles, on en déduit que  $350 - 50 = 300$  jurys satisfont la condition requise.

6. **Exercice 9 :**

1a) Une grille est entièrement déterminée par la position de ses cases noires, il suffit donc de choisir

$$\text{simultanément 4 cases noires parmi les 24 cases de la grille, ce qui donne } \binom{24}{4} = 10626 \text{ grilles différentes.}$$

- b) • Pour former une grille avec exactement 2 coins noircis, on commence par choisir 2 coins parmi 4, ce qui laisse  $\binom{4}{2} = 6$  possibilités. On choisit ensuite 2 cases parmi les 20 qui ne sont pas des coins, soit  $\binom{20}{2} = 190$  possibilités. Il y a donc  $6 \times 190 = 1140$  grilles avec exactement deux coins noircis.
- Pour former une grille sans coin noirci, on choisit 4 cases noires parmi les 20 cases qui ne sont pas des coins, soit  $\binom{20}{4} = 4845$  grilles. Le nombre de grilles avec au moins un coin noirci est donc  $10626 - 4845 = 5781$ .
- Pour former une grille avec exactement une case noircie par colonne, on choisit successivement 1 case parmi les 6 de chacune des colonnes (6 possibilités à chaque fois). Au total, cela donne  $6^4 = 1296$  grilles avec exactement une case noircie par colonne.
- Pour former une grille avec exactement une case noircie par colonne et pas ligne, on commence par choisir une case parmi les 6 de la première colonne (6 possibilités). On choisit ensuite une case parmi les 5 de la deuxième colonne qui ne sont pas dans la ligne de la première case noircie (5 possibilités). On continue en choisissant une case parmi les 4 cases de la troisième colonne qui ne sont pas dans la ligne des deux premières cases noircies (4 possibilités). On termine en choisissant une case parmi les 3 cases de la quatrième colonne qui ne sont pas dans la ligne des trois premières cases noircies (3 possibilités). Au total, il y a  $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$  grilles.
- 2a) Comme plus haut, une grille est entièrement déterminée par la position de ses cases noires. Il suffit donc de choisir simultanément  $k$  cases noires parmi les  $np$  cases de la grille, ce qui donne  $\binom{np}{k}$  grilles différentes.
- b) • Pour former une grille avec au plus une case noire noircie par colonne, on choisit successivement  $k$  colonnes parmi les  $p$  de la grille (soit  $\binom{p}{k}$  possibilités), puis une case parmi les  $n$  dans chacune des  $k$  colonnes ( $n^k$  possibilités). Au total, il y a  $\binom{n}{k} \times n^k$  grilles.
- Pour former une grille avec exactement une case noircie par colonne et par ligne, on commence par choisir  $k$  colonnes parmi les  $p$  de la grille (soit  $\binom{p}{k}$  possibilités). On choisit ensuite 1 case parmi les  $n$  de la première colonne, puis 1 case parmi les  $n-1$  de la deuxième colonne qui ne sont pas dans la ligne de la première case noire, puis 1 case parmi les  $n-2$  de la troisième colonne qui ne sont pas dans la ligne des deux premières cases noires, et ainsi de suite jusqu'à choisir 1 case parmi les  $n-k+1$  de la  $k$ -ième colonne qui ne sont pas dans la ligne des  $k-1$  premières cases noires.
- Au total, on obtient  $\binom{p}{k} \times \frac{n!}{(n-k)!}$  grilles.

### 7. Exercice 12 :

- a) On peut utiliser différentes représentations :
- une disposition des  $2n$  individus peut être représentée par un  $2n$ -arrangement d'un ensemble de cardinal  $2n$
  - on commence par choisir la personne qui va occuper le premier siège de la rangée ( $2n$  possibilités), puis la personne qui va occuper le deuxième siège ( $2n-1$  possibilités), ... jusqu'à la personne qui va occuper le dernier siège (1 possibilité).
  - on compte le nombre de bijections entre les  $2n$  personnes et les  $2n$  sièges de la rangée.

Il y a  $(2n)!$  dispositions possibles

- b) Afin d'obtenir une alternance entre homme et femme, on commence par choisir si le premier siège sera occupé par une femme ou un homme, donc on a 2 possibilités.

Puis ensuite on place les  $n$  femmes sur les  $n$  sièges : on a  $n!$  dispositions possibles (nombre de bijections entre les  $n$  femmes et les  $n$  sièges attribuées aux femmes).

Enfin, on place les  $n$  hommes sur les  $n$  places restantes ( $n!$  dispositions possibles).

Ainsi, le nombre de manières de placer les  $2n$  personnes en respectant l'alternance homme-femme est  $2(n!)^2$

### 8. Exercice 14 :

Considérons  $2n$  individus que l'on numérote de 1 à  $2n$ .

On choisit avec qui on apparie l'individu numéro 1 : il y a  $2n-1$  choix possibles.

Une fois ce choix effectué, il reste  $2n-2$  individus à apparter : il y a  $a_{n-1}$  choix possibles.

On en déduit la relation de récurrence :  $a_n = (2n-1)a_{n-1}$

$$a_n = (2n-1)a_{n-1} = (2n-1)(2n-3)a_{n-2} = \cdots = (2n-1)(2n-3) \times \cdots \times 3a_1 \text{ et } a_1 = 1.$$

On a alors :  $a_n = (2n-1)(2n-3) \times \dots \times 3 \times \frac{(2n) \times (2n-2) \times \dots \times 2}{(2n) \times (2n-2) \times \dots \times 2}$

On obtient :  $a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

**9. Exercice 15 :**

a) Si  $f$  est une application strictement croissante, alors  $\{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$  est une partie à  $n$  éléments de l'ensemble  $\llbracket 1, p \rrbracket$ .

Réciprocement, si  $Y$  est une partie à  $n$  éléments de l'ensemble  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , on numérote  $y_1, y_2, \dots, y_n$  les éléments de  $Y$  par ordre croissant :  $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ .

L'application  $f$  définie par  $f(i) = y_i$  est une application strictement croissante de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vers  $\llbracket 1, p \rrbracket$ .

Il y a donc autant d'applications strictement croissantes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vers  $\llbracket 1, p \rrbracket$  que de parties à  $n$  éléments de l'ensemble  $\llbracket 1, p \rrbracket$ .

Le nombre d'applications strictement croissantes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vers l'ensemble  $\llbracket 1, p \rrbracket$  est donc égal à  $\binom{p}{n}$ .

b) On note  $A$  l'ensemble des applications croissantes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vers  $\llbracket 1, p \rrbracket$  et on note  $B$  l'ensemble des applications strictement croissantes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vers  $\llbracket 1, n+p-1 \rrbracket$ .

On va montrer que  $A$  et  $B$  ont le même cardinal.

On fait correspondre à un élément  $f$  de  $A$  l'élément  $g = \varphi(f)$  définie par  $g(i) = f(i) + i - 1$ .

$g$  est une application de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vers  $\llbracket 1, n+p-1 \rrbracket$ .

Comme  $f(1) \leq f(2) \leq \dots \leq f(n)$ , alors  $g(1) < g(2) < \dots < g(n)$ .

$g$  appartient donc à  $B$ .

De même, on fait correspondre à un élément  $g$  de  $B$  l'élément  $f = \psi(g)$  définie par  $f(i) = g(i) - i + 1$ .

$f$  est une application de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vers  $\llbracket 1, n+p-1 \rrbracket$ .

$f(i+1) - f(i) = g(i+1) - g(i) - 1 \geq 0$  car  $g(i+1) - g(i)$  est un entier naturel non nul, donc est supérieur à 1.  $f$  appartient donc à  $A$ .

Les applications  $\varphi$  et  $\psi$  sont réciproques.

Comme il existe une bijection de  $A$  vers  $B$ , on en déduit que  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B) = \binom{n+p-1}{n}$  (en utilisant le résultat de la question précédente).

**10. Exercice 23 :**

a) Pour former le groupe 1, on choisit simultanément 3 élèves parmi les 48, soit  $\binom{48}{3}$  possibilités. Ensuite, on choisit simultanément 3 élèves parmi les 45 restants pour former le groupe 2. On continue ainsi jusqu'au groupe 15, obtenu en choisissant simultanément 3 élèves parmi les 6 restants. Enfin le dernier groupe est constitué des 3 derniers élèves. Le nombre total  $N$  de trinômes lorsque les groupes sont numérotés est donc :

$$N = \binom{48}{3} \times \binom{45}{3} \times \dots \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} = \frac{48!}{3!45!} \times \frac{45!}{3!42!} \times \dots \times \frac{6!}{3!3!} \times 1 = \frac{48!}{(3!)^{16}}$$

On obtient  $N = 4400365813372582601747033381701114920960000000000$

b) Notons  $N'$  le nombre de façons de former 16 trinômes non numérotés.

Pour former 16 trinômes numérotés, on forme 16 trinômes ( $N'$  possibilités), puis on leur attribue un numéro ( $16!$  possibilités).

On a donc :  $N = N' \times 16!$  et ainsi  $N' = \frac{N}{16!} = 210314486592266380347977873920000000$ .

**11. Exercice 25 :**

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , il y a  $\binom{n}{k}$  parties de  $E$  de cardinal  $k$ . On en déduit :

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} n = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n2^{n-1}$$

Les résultats à trouver (calculs non détaillés) pour les deux sommes doubles sont :

$$\sum_{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cap Y) = n4^{n-1}$$

$$\sum_{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cup Y) = 3n4^{n-1}$$

12. Exercice 26 :

1. Il n'y a qu'une application de  $\{1\}$  vers  $\{1\}$  et ce n'est pas un dérangement :  $d_1 = 0$

Il y a 2 permutations de l'ensemble  $\{1, 2\}$  dont une seule est un dérangement :  $d_2 = 1$

2. On a  $\mathcal{E}_{n+1} \cap \mathcal{F}_{n+1} = \emptyset$  et  $\mathcal{E}_{n+1} \cup \mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{D}_{n+1}$ , donc  $d_{n+1} = \text{Card}(\mathcal{D}_{n+1}) = \text{Card}(\mathcal{E}_{n+1}) + \text{Card}(\mathcal{F}_{n+1})$

• Soit  $f \in \mathcal{E}_{n+1}$ .

Notons  $i = f(n+1)$  :  $i$  est distinct de  $n+1$  (car  $f$  est un dérangement).

On a donc  $f(n+1) = i$  et  $f(i) = n+1$ .

La restriction de  $f$  à  $\{1, 2, 3, \dots, n, n+1\} \setminus \{i, n+1\}$  est un dérangement.

On peut donc caractériser  $f$  par l'élément  $i$  ( $n$  choix possibles) et un dérangement de l'ensemble à  $n-1$  éléments  $\{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$  ( $d_{n-1}$  choix possibles).

Ainsi  $\text{Card}(\mathcal{E}_{n+1}) = nd_{n-1}$

• Soit  $f \in \mathcal{F}_{n+1}$ .

Notons  $j = f^{-1}(n+1)$  :  $j$  est distinct de  $n+1$  (car  $f$  est un dérangement).

L'application  $g$  défini sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  par  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , si  $k \neq j$ , alors  $g(k) = f(k)$  et  $g(j) = f(n+1)$  est un dérangement de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

On peut donc caractériser  $f$  par l'élément  $j$  ( $n$  choix possibles) et un dérangement de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  ( $d_n$  choix possibles).

Ainsi  $\text{Card}(\mathcal{F}_{n+1}) = nd_n$

On en déduit que  $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$

Remarque :  $d_1 + d_0 = 1 = d_2$ , la relation précédente est encore valable pour  $n = 1$ .

3a)  $u_{n+1} = d_{n+1} - (n+1)d_n = n(d_n + d_{n-1}) - (n+1)d_n = -d_n + nd_{n-1} = -u_{n-1}$

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est donc une suite géométrique de raison  $-1$  :  $u_n = (-1)^{n-1}u_1$ .

Et  $u_1 = -1$ , d'où  $u_n = (-1)^n$

$$\text{b) On a } d_1 = 0 = \sum_{k=0}^1 \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Supposons pour un entier  $n \geq 1$  que  $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ . Alors

$$d_{n+1} = u_{n+1} + (n+1)d_n = (-1)^{n+1} \times \frac{(n+1)!}{(n+1)!} + (n+1) \times n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Ainsi,  $\forall n \geq 1 \quad d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$