Exercice 1 : les polynômes de Tchebychev de seconde espèce

1. On a facilement : $\boxed{P_2(X) = 4X^2 - 1,\ P_3(X) = 8X^3 - 4X \text{ et } P_4(X) = 16X^4 - 12^2 + 1}$ **0.5 pt**

2. Pour $n \in [\![0, 4]\!]$, on voit que $P_n(0) = (-1)^{n/2}$ si n est pair, et $P_n(0) = 0$ si n est impair.

   En évaluant la relation $P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$ en 0, on obtient : $P_{n+2}(0) = -P_n(0)$.

   Démontrons par récurrence la proposition $\mathcal{H}_k$: « $P_{2k}(0) = (-1)^k$ et $P_{2k+1}(0) = 0$ »

   $\mathcal{H}_0$ est vraie.

   Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie pour un entier $k \geq 0$.
   Alors $P_{2k+2}(0) = -P_{2k}(0) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$
   Et $P_{2k+3}(0) = -P_{2k+1}(0) = 0$
   $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

   $\boxed{\text{Ainsi, pour tout entier } n,\ P_n(0) = (-1)^{n/2} \text{ si } n \text{ est pair, et } P_n(0) = 0 \text{ si } n \text{ est impair}}$

3. Montrons par récurrence la proposition $\mathcal{H}_n$: « $\deg(P_n) = n$ et $d_n = 2^n$ »

   $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vraies.
   Supposons $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ vraies pour un entier $n \geq 0$.
   $\deg\big(2XP_{n+1}(X)\big) = n + 2$ et $\deg\big(P_n(X)\big) = n$ (les degrés sont distincts)
   donc
   $$\begin{aligned}\deg\big(P_{n+2}(X)\big) &= \deg\big(2XP_{n+1}(X) - P_n(X)\big)\\ &= \max\big(\deg(2XP_{n+1}(X)), \deg(P_n(X))\big) = n + 2.\end{aligned}$$
   Et le coefficient dominant de $P_{n+2}(X)$ est égal à celui de $2XP_{n+1}(X)$: $d_{n+2} = 2d_{n+1} = 2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2}$
   $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie.

   $\boxed{\text{Ainsi, pour tout entier } n,\ \deg(P_n) = n \text{ et } d_n = 2^n}$ **1.5 pt**

4. (a) $\boxed{\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$ **0.25 pt**

   (b) Démontrons par récurrence la proposition $\mathcal{H}_n$: « $\forall\theta \in]0, \pi[\quad P_n\big(\cos(\theta)\big)\sin(\theta) = \sin\big((n+1)\theta\big)$ »
   $\mathcal{H}_0$ est vraie.
   $\forall\theta \in]0, \pi[\quad P_1\big(\cos(\theta)\big)\sin(\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta) = \sin(2\theta)$: $\mathcal{H}_1$ est vraie.

   Supposons $\mathcal{H}_{n-1}$ et $\mathcal{H}_n$ vraies pour un entier $n \geq 1$.
   $$\begin{aligned}P_{n+1}\big(\cos(\theta)\big)\sin(\theta) &= 2\cos(\theta)P_n\big(\cos(\theta)\big)\sin(\theta) - P_{n-1}\big(\cos(\theta)\big)\sin(\theta)\\ &= 2\cos(\theta)\sin\big((n+1)\theta\big) - \sin\big(n\theta\big)\end{aligned}$$

   En appliquant la formule précédente à $a = n + 2$ et $b = n$, on a :
   $$\sin\big((n+2)\theta\big) + \sin\big(n\theta\big) = 2\sin\big((n+1)\theta\big)\cos(\theta)$$
   Ce qui permet de déduire : $P_{n+1}\big(\cos(\theta)\big)\sin(\theta) = \sin\big((n+2)\theta\big)$
   $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie

   $\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } \theta \in]0, \pi[\ , \quad P_n\big(\cos(\theta)\big)\sin(\theta) = \sin\big((n+1)\theta\big)}$ **1.5 pt**

   (c) On utilise la relation $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ pour obtenir : $\dfrac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin(\theta)} \underset{\theta\to 0}{\sim} \dfrac{(n+1)\theta}{\theta}$

   $\boxed{\text{Par conséquent, } \lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin(\theta)} = n + 1}$

   La fonction $x \mapsto P_n(x)$ est continue en 1 : $\lim\limits_{x\to 1} P_n(x) = P_n(1)$,
   Puis par composition des limites : $\lim\limits_{\theta\to 0} P_n\big(\cos(\theta)\big) = P_n(1)$

   Et d'après ce qui précède, $P_n\big(\cos(\theta)\big) = \dfrac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin(\theta)} \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} n + 1$

   $\boxed{\text{On en déduit (par unicité de la limite) que } P_n(1) = n + 1}$ **1.5 pt**

   (d) Commençons par chercher les racines dans l'intervalle $]-1, 1[$ sous la forme $x = \cos(\theta)$ avec $\theta \in]0, \pi[$.
   On a : $P_n(x) = 0 \iff P_n\big(\cos(\theta)\big) = 0$
   $\iff \sin\big((n+1)\theta\big) = 0$ *en utilisant la relation 4b et le fait que* $\sin(\theta) \neq 0$
   la fonction sin s'annule n fois sur l'intervalle $]0, (n+1)\pi[$ *: aux points $k\pi$ avec* $k \in [\![1, n]\!]$
   $\iff$ il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $(n+1)\theta = k\pi$

On obtient ainsi n racines distinctes de P_n qui sont : $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) > \cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) > ... > \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)$

Comme $\deg(P_n) = n$, on a toutes les racines et elles sont simples.

$$\boxed{P_n(X) = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)}$$ **2.5 pts**

(e) On évalue en 0 : $P_n(0) = 2^n(-1)^n \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$. On utilise alors le résultat de la question 2 :

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair, } \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 0 \;. \qquad \text{Si } n \text{ est pair : } \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^n} \qquad \textbf{1 pt}}$$

5. (a) $\lim\limits_{t\to 0}\left(1 - 2xt + t^2\right) = 1$, donc au voisinage de 0, $1 - 2xt + t^2 > 0$.

Il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall t \in]-\alpha, \alpha[\quad 1 - 2xt + t^2 > 0$

$\boxed{\text{La fonction } f_x \text{ est bien définie sur l'intervalle }]-\alpha,\alpha[}$ **1 pt**

(b) La fonction f_x est de classe C^∞ (inverse d'une fonction C^∞ qui ne s'annule pas) sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$, donc admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. **0.5 pt**

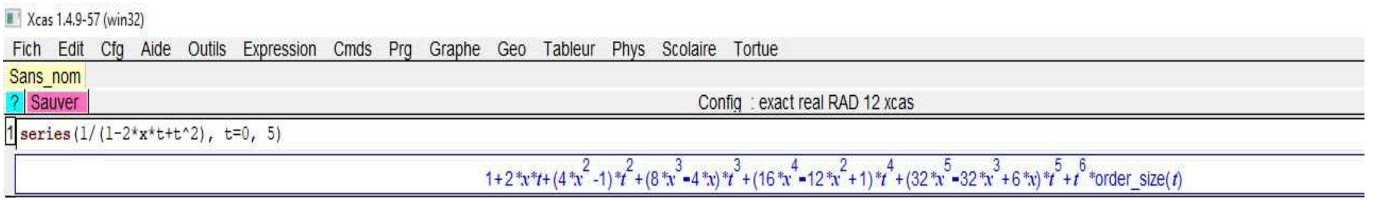
(c) Notons c_k les coefficients de ce développement limité : $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} c_k t^k + \mathrm{o}(t^n)$

$$\begin{aligned}
(1-2xt+t^2)\times f_x(t) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k t^k - 2x\sum_{k=0}^{n} c_k t^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} c_k t^{k+2} + \mathrm{o}(t^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k t^k - 2x\sum_{k=1}^{n+1} c_{k-1} t^{k} + \sum_{k=2}^{n+2} c_{k-2} t^{k} + \mathrm{o}(t^n) \quad \textit{(changement d'indices)}\\
&\underset{x\to 0}{=} c_0 + (c_1 - 2xc_0)t + \sum_{k=2}^{n}\Big(c_k - 2xc_{k-1} + c_{k-2}\Big)t^k + \mathrm{o}(t^n)
\end{aligned}$$

Comme cela correspond au développement limité de la fonction constante égale à 1, on déduit par unicité du développement limité que :

$$c_0 = 1,\ c_1 = 2xc_0 = 2x, \text{ et } \forall k \in [\![2,n]\!] \quad c_k = 2xc_{k-1} - c_{k-2}$$

On montre alors aisément par récurrence (de pas double) que $c_k = P_k(x)$. **2.5 pts**



Exercice 2 : analyse saymptotique

Partie A : (5.5 pts)

1. Soit $\mathcal{P}_n$: $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$.

$f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$ vraie.

$f_{n-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$, donc $\dfrac{f_{n-1}(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Par conséquent, $\dfrac{f_{n-1}(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ou encore : $f_{n-1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x)$

On en déduit que $x + f_{n-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$,

puis $f_n(x) = \sqrt{x + f_{n-1}(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$. Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$\boxed{\text{D'après le principe de récurrence, } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}}$ **(1.5 pt)**

$\dfrac{f_n(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = 0}$ **(0.5 pt)**

2. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \dfrac{f_{n-1}(x)}{x}} - 1\right)$.

Comme $\sqrt{1+t} - 1 \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{2}$, et $\dfrac{f_{n-1}(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient $\sqrt{1 + \dfrac{f_{n-1}(x)}{x}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{f_{n-1}(x)}{2x}$.

D'où $f_n(x) - \sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x} \times \dfrac{f_{n-1}(x)}{2x}$.

De plus, $f_{n-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$.

Alors, $f_n(x) - \sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$, et ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) - \sqrt{x} = \dfrac{1}{2}}$ **(1.5 pt)**

3. On a donc $f_{n-1}(x) - \sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$, ou encore $f_{n-1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x} + \dfrac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$

On obtient alors : $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x + \sqrt{x} + \dfrac{1}{2} + \mathrm{o}(1)} \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}\sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

On utilise la relation $\sqrt{1+t} \underset{t\to 0}{=} 1 + \dfrac{t}{2} - \dfrac{t^2}{8} + \mathrm{o}(t^2)$ avec $t \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

$$t^2 \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x} \times \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)\frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$\boxed{\text{Ainsi, } f_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8\sqrt{x}} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}$ **(2 pts)**

Partie B : (5 pts)

1. Présentation 1 : **1.5 pt**

On définit la fonction f_n sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f_n(x) = x - \cos(\frac{x}{n})$.

f_n est **continue** et **strictement croissante** (comme somme de deux fonctions strictement croissantes), donc f_n réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers $[f_n(0), f_n(\frac{\pi}{2})]$.

Or $f(0) = -1$ et $f_n(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \cos(\frac{\pi}{2n})$

$f_n(\frac{\pi}{2}) \geq \frac{\pi}{2} - 1$, donc $f_n(\frac{\pi}{2}) > 0$.

Par conséquent, l'intervalle $[f_n(0), f_n(\frac{\pi}{2})]$ contient 0.

$\boxed{\text{Il existe donc un unique réel } x_n \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } f_n(x_n) = 0}$

Présentation 2 :

On définit la fonction f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = x - \cos(\frac{x}{n})$.

- f est continue.
- $f(0) = -1$
- $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \cos(\frac{\pi}{2n}) \geq \frac{\pi}{2} - 1$, donc $f(\frac{\pi}{2}) > 0$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $f(x_n) = 0$.

Comme f est strictement croissante (comme somme de deux fonctions strictement croissantes), la fonction f est injective et admet au plus une valeur d'annulation.

$\boxed{\text{Ainsi, l'équation } \cos(\frac{x}{n}) = x \text{ une unique solution dans l'intervalle } [0, \frac{\pi}{2}]}$

2. Puisque $x_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\dfrac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0).

Ainsi, $x_n = \cos\left(\dfrac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(0)$ (par continuité de la fonction cos), ce qui donne $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$

$x_n - 1 = \cos\left(\dfrac{x_n}{n}\right) - 1$.

Or $\cos(t) - 1 \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{t^2}{2}$, d'où $x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x_n^2}{2n^2}$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$, donc $x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

$\boxed{\text{On en déduit que } x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}}$ **1.5 pt**

3. On a $x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, c'est-à-dire $x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

$$x_n = \cos\left(\frac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \cos\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

avec $u^2 = \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^3} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)^2 = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^4} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$ et $u^4 = \dfrac{1}{n^4} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$

$\boxed{\text{D'où } x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{13}{24n^4} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)}$ **2 pts**

Commentaire :

L'erreur classique est d'utiliser le développement limité de la fonction cos à l'ordre 4 au voisinage de 0 :
$x_n = \cos\left(\dfrac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{x_n^2}{2n^2} + \dfrac{x_n^4}{24n^4} + \mathrm{o}\left(\dfrac{x_n^4}{n^4}\right)$
Puis de remplacer le terme x_n par un équivalent (ici 1) dans une somme (**opération non valable**) :
$x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{24n^4} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$

Il faut remplacer x_n par son développement asymptotique : $x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
et $x_n^2 \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
et $x_n^4 \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathrm{o}(1)$

pour avoir un résultat correct.