
EXERCICE : DÉNOMBREMENT

Partie A :

1. Il n'y a qu'une seule 1-liste dont la somme des composantes vaut n : la liste (n) . $S(n, 1) = 1$ **(0.25 pt)**
2. Une p -liste $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ dont la somme des composantes vaut 1 a $p - 1$ composantes qui sont nulles et une composante qui vaut 1.

On choisit la position de la composante qui vaut 1 : il y a p possibilités.

$\text{Ainsi, } S(1, p) = p$

(0.75 pt)

Il y a deux types de p -liste $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ dont la somme des composantes vaut 2 :

- celles qui ont deux composantes égales à 1 et toutes les autres qui sont nulles.

On choisit la position des deux composantes qui valent 1 : il y a $\binom{p}{2}$ possibilités.

- celles qui ont une composante égale à 2 et toutes les autres qui sont nulles.

On choisit la position de la composante qui vaut 2 : il y a p possibilités.

D'où $S(2, p) = \binom{p}{2} + p = \frac{p(p-1)}{2} + p$

$S(2, p) = \frac{p(p+1)}{2}$

(1.5 pt)

3. Méthode 1 : par récurrence sur n .

Soit $P(n) : \ll \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \gg$

$P(p)$ est vraie (il n'y a qu'un terme dans la somme et $\binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$)

Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq p$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \text{ d'après } P(n) \\ &= \binom{n+2}{p+1} \text{ d'après la relation de Pascal.} \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq p$.

Elle l'est également lorsque $n < p$ (les deux termes de la relation sont nuls).

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

(1.5 pt)

Méthode 2 : d'après la relation de Pascal, $\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^n \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) \\ &= \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} \quad \text{somme télescopique} \end{aligned}$$

Comme $\binom{p}{p+1} = 0$, alors $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

4. Notons $\mathcal{L}$ l'ensemble des $(p+1)$ -listes $(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1})$ d'entiers naturels telles que $x_1 + x_2 + \dots + x_p + x_{p+1} = n$.
La dernière composante x_{p+1} d'une $(p+1)$ -liste de $\mathcal{L}$ est un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$
Séparons les $(p+1)$ -listes de $\mathcal{L}$ en plusieurs ensembles disjoints suivant la valeur de x_{p+1} .

Les $(p+1)$ -listes de $\mathcal{L}$ ont :

- soit une composante x_{p+1} égale à 0 qui est précédée d'une p -liste dont la somme des composantes vaut n
il y en a $S(n, p)$
- soit une composante x_{p+1} égale à 1 qui est précédée d'une p -liste dont la somme des composantes vaut $n-1$
il y en a $S(n-1, p)$
- soit une composante x_{p+1} égale à 2 qui est précédée d'une p -liste dont la somme des composantes vaut $n-2$
il y en a $S(n-2, p)$
- $\vdots$
- soit une composante x_{p+1} égale à n qui est précédée d'une p -liste dont la somme des composantes vaut 0
il y en a $S(0, p)$

$$\boxed{S(n, p+1) = S(0, p) + S(1, p) + \dots + S(n, p)} \quad (1.5 \text{ pt})$$

5. Démontrons par récurrence sur p la proposition $\mathcal{H}_p : \ll \forall n \in \mathbb{N} \quad S(n, p) = \binom{n+p-1}{p-1} \gg$

$$S(n, 1) = 1 \text{ et } \binom{n}{0} = 1. \mathcal{H}_1 \text{ est vraie.}$$

Supposons $\mathcal{H}_p$ vraie pour un entier $p \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S(n, p+1) &= \sum_{k=0}^n S(k, p) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{k+p-1}{p-1} \quad \text{d'après } \mathcal{H}_p \\ &= \sum_{k=p-1}^{n+p-1} \binom{k}{p-1} \quad \text{en opérant un changement d'indices} \\ &= \binom{n+p}{p} \quad \text{d'après la question 3} \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

$$\boxed{\text{On a ainsi montré par récurrence simple sur } p \text{ que pour tout } (n, p) \in \mathbb{N} \quad S(n, p) = \binom{n+p-1}{p-1}} \quad (1.5 \text{ pt})$$

6. Notons :

- $\mathcal{L}$ l'ensemble des p -listes $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'entiers naturels non nuls telles que $x_1 + x_2 + \dots + x_p = n$
- $\mathcal{L}'$ l'ensemble des p -listes $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'entiers naturels telles que $x_1 + x_2 + \dots + x_p = n-p$

Notons que ces deux ensembles sont vides lorsque $p > n$.

Supposons dans ce qui suit que $p \leq n$.

A chaque élément $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de $\mathcal{L}$, on associe la p -liste $(x'_1, x'_2, \dots, x'_p)$ où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad x'_i = x_i - 1$.

$$\sum_{i=1}^p x'_i = \sum_{i=1}^p x_i - \sum_{i=1}^p 1 = n - p, \text{ donc la } p\text{-liste } (x'_1, x'_2, \dots, x'_p) \text{ est un élément de } \mathcal{L}'.$$

Il est évident que l'application $(x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto (x'_1, x'_2, \dots, x'_p)$ est une bijection de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{L}'$.

En retirant 1 à chaque composante, on transforme un élément de $\mathcal{L}$ en un élément de $\mathcal{L}'$, et en ajoutant 1 à chaque composante, on transforme un élément de $\mathcal{L}'$ en un élément de $\mathcal{L}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \text{Card}(\mathcal{L}) = \text{Card}(\mathcal{L}') = \binom{n-1}{p-1}} \quad \text{résultat également valable lorsque } p > n \quad (1.5 \text{ pt})$$

Partie B :

1. L'ensemble $\mathcal{F}_1$ est constitué des parties A de la forme $\llbracket i, i+n-1 \rrbracket$ (un seul bloc) où i est un entier compris entre 1 et $n+1$. Donc $\text{Card}(\mathcal{F}_1) = n+1$ (1 pt)

On s'intéresse désormais aux parties A avec n blocs. Chaque bloc de A est donc un singleton.

Le premier bloc contient soit l'entier 1, soit l'entier 2. Le deuxième bloc contient soit l'entier 3, soit l'entier 4.

Plus généralement, le k -ième bloc contient soit l'entier impair $2k-1$, soit l'entier pair $2k$.

On remarque également qu'après un singleton contenant un entier pair, il n'y a que des blocs formés d'entiers pairs.

Si A contient un nombre pair, alors A est de la forme $\{1, 3, 5, \dots, 2k-1, 2k+2, 2k+4, \dots, 2n\}$

Il y a n parties A de cette forme là (n choix possibles pour le plus petit entier pair de A).

Il y a également la partie $\{1, 3, 5, \dots, (2n-1)\}$ qui comprend n blocs.

Finalement $\text{Card}(\mathcal{F}_n) = n + 1$	(1.5 pt)
---	-----------------

2. Soit A une partie à n éléments de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ avec k blocs.

Notons $B_1 = \llbracket x_1, y_1 \rrbracket$, $B_2 = \llbracket x_2, y_2 \rrbracket$, ..., $B_k = \llbracket x_k, y_k \rrbracket$ les blocs de A , indexés de sorte que

$$1 \leq x_1 \leq y_1 < x_2 \leq y_2 < x_3 \leq y_3 \dots < x_k \leq y_k \leq 2n$$

Posons : $i_r = y_r - x_r + 1$ (i_r est le nombre d'éléments du bloc B_r)

$$j_0 = x_1 - 1 \quad (j_0 \text{ correspond au nombre d'éléments avant le bloc } B_1)$$

$$\text{pour } r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad j_r = y_{r+1} - x_r - 1$$

(j_r est le nombre d'éléments qui se trouvent entre le bloc B_r et le bloc B_{r+1})

$$j_k = 2n - y_k \quad (j_k \text{ correspond au nombre d'éléments après le bloc } B_k)$$

Ainsi définis, $i_1, i_2, \dots, i_k$ sont des entiers naturels non nuls, et $i_1 + i_2 + \dots + i_k = \sum_{r=1}^k \text{Card}(B_r) = \text{Card}(A) = n$

$j_1, j_2, \dots, j_{k-1}$ sont des entiers naturels non nuls, j_0 et j_k sont des entiers naturels et

$$j_0 + j_1 + \dots + j_k = \text{Card}(\overline{A}) = n$$

Réciproquement, étant donné une liste $(j_0, i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_{k-1}, j_{k-1}, i_k, j_k)$ vérifiant les conditions de l'énoncé, on définit k blocs $B_r = \llbracket x_r, y_r \rrbracket$ en posant :

$$x_r = 1 + j_0 + \sum_{s=1}^{r-1} (i_s + j_s) \quad \text{et} \quad y_r = x_r + i_r - 1$$

$A = \bigcup_{r=1}^k B_r$ est alors une partie à n éléments de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ avec k blocs. **(3 pts)**

Exemples de l'énoncé :

Avec $A = \{1, 2, 5\}$, on obtient : $x_1 = 1, y_1 = 2, x_2 = y_2 = 5$

Puis, $j_0 = 0, j_1 = 2, j_2 = 1$, et $i_1 = 2, i_2 = 1$

Avec $A = \{2, 4, 6, 7\}$, on obtient : $x_1 = y_1 = 2, x_2 = y_2 = 4, x_3 = 6$ et $y_3 = 7$

Puis, $j_0 = j_1 = j_2 = j_3 = 1$ et $i_1 = i_2 = 1, i_3 = 2$

3. Définir une partie A à n éléments de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ avec k blocs revient à choisir :

- une k -liste $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ d'entiers naturels non nuls tels que $i_1 + i_2 + \dots + i_k = n$

il y a $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités d'après la première partie

- puis une $(k+1)$ -liste $(j_0, j_1, \dots, j_k)$ d'entiers naturels tels que $j_0 + i_1 + \dots + j_k = n$ où j_0 et j_k peuvent être nuls

On sépare ces $(k+1)$ -listes en quatre ensembles disjoints :

- celles où $j_0 = 0$ et $j_r \neq 0$: il y en a $\binom{n-1}{k-1}$
- celles où $j_0 \neq 0$ et $j_r = 0$: il y en a $\binom{n-1}{k-1}$
- celles où $j_0 = 0$ et $j_r = 0$: il y en a $\binom{n-1}{k-2}$
- celles où $j_0 \neq 0$ et $j_r \neq 0$: il y en a $\binom{n-1}{k}$

$$\begin{aligned} \text{On obtient donc : } \text{Card}(\mathcal{F}_k) &= \binom{n-1}{k-1} \times \left(\binom{n-1}{k-2} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) \\ &= \binom{n-1}{k-1} \times \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \quad \text{relation de Pascal} \\ &= \binom{n-1}{k-1} \times \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Card}(\mathcal{F}_k) = \binom{n-1}{k-1} \times \binom{n+1}{k}$	(2.5 pt)
--	-----------------