

EXERCICE 1 : ÉTUDE DE SOUS-ESPACES VECTORIELS DE $\mathbb{R}^4$

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$.

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 6\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

En soustrayant les deux dernières lignes du système, on obtient $\lambda_3 = 0$.

On déduit ensuite que $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$.

Ainsi, la famille (u_1, u_2, u_3) est libre

1.25 pt

Remarque : cette famille est de plus génératrice de l'espace F , on déduit que $\dim(F) = 3$.

2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x, y, z, t) \in F \iff \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = y \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = z \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = t \end{cases}$$

$$\iff \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ 6\lambda_2 - 3\lambda_3 = y - 2x & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = z - 2x & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = t - x & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_3 = y + 2x - 2z & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = z - 2x \\ -\lambda_3 = t + x - z & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{cases}$$

$$\iff y + 2x - z = -(t + x - z)$$

$$\iff 3x + y - 3z + t = 0$$

F est ainsi le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $3x + y - 3z + t = 0$

2 pts

Contrôle des résultats : on s'assure que les composantes de vecteurs u_1, u_2 et u_3 vérifient l'équation de F .

3. Approche de la question : on sait que famille (u_1, u_2, u_3) est libre. La famille $\mathcal{F}$ complétée avec le vecteur u_4 est alors libre seulement lorsque le vecteur u_4 n'est pas combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 .

Comme on a déterminé une équation de l'espace engendré par ces trois vecteurs, il est très facile de savoir si u_4 est combinaison linéaire ou non de ces trois vecteurs.

Les composantes du vecteur u_4 vérifient l'équation $3x + y - 3z + t = 0$ de F .

Par conséquent, $u_4 \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

u_4 étant une combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 ,

la famille $\mathcal{F}$ est liée

0.5 pts

Remarque : on peut également pour répondre à cette question mettre en évidence une combinaison linéaire non triviale de ces quatre vecteurs donnant le vecteur nul.

$$17u_1 - 4u_2 - 12u_3 - 3u_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

4. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x, y, z, t) \in G \iff \begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ x - 3y + 4z - 3t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ -4y + 6z - 4t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y + 2z - t = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{3}{2}z - t \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

On en déduit une paramétrisation de l'espace G .

$$G = \left\{ \left(\frac{z}{2}, \frac{3z}{2} - t, z, t \right) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(v_1, v_2) \text{ avec } v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0 \right) \text{ et } v_2 = (0, -1, 0, 1)$$

La famille (v_1, v_2) est donc génératrice de G .

Cette famille est de plus libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires).

Contrôle des résultats : on s'assure que les composantes de vecteurs v_1 et v_2 vérifient l'équation de G .

Remarque : on a également $G = \text{Vect}(v'_1, v_2)$ avec $v'_1 = (1, 3, 2, 0)$ et $v_2 = (0, -1, 0, 1)$

La famille (v_1, v_2) est donc une base de G **1.5 pt**

5. Les composantes des vecteurs v_1 et v_2 vérifient l'équation de l'espace F .

Par conséquent, $v_1 \in F$, $v_2 \in F$, et donc $\text{Vect}(v_1, v_2) \subset F$, c'est-à-dire $G \subset F$

Les composantes du vecteur u_2 ne vérifient pas l'équation $x + y - 2z + t = 0$,

Par conséquent $u_2 \notin G$ et donc F n'est pas inclus dans G . **0.75 pt**

EXERCICE 2 : SOUS-ESPACES VECTORIELS DE $\mathbb{R}^4$ (9 PTS)

1. **Barème : 2 points** (1 point pour la résolution du système avec l'introduction de 2 paramètres, 0.5 point pour la mise en évidence d'une famille génératrice, 0.5 point pour la justification que la famille est libre)

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} 2x - 4y + z + t = 0 \\ 3x - y + 4z - t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - 4y + z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow \frac{1}{5}(L_1 + L_2) \\ &\iff \begin{cases} x = x \\ y = x + z \\ z = z \\ t = 2x + 3z \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que $F = \{(x, x + z, z, 2x + 3z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 1, 0, 2)$ et $v = (0, 1, 1, 3)$

Les deux vecteurs u et v forment une famille génératrice de F . Comme de plus, ils ne sont pas colinéaires, ils sont linéairement indépendants.

Ainsi, la famille (u, v) forme une base de F

2. **Barème : 2 points** (0.5 point pour la relation linéaire exprimant c en fonction de a et b , 1.5 point pour les équations linéaires caractérisant G)

On a : $c = 3a + 2b$. Par conséquent, $G = \text{Vect}(a, b)$.

$(x, y, z, t) \in G \iff$ il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 a + \lambda_2 b = (x, y, z, t)$

$$\iff \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = x \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = y \\ \lambda_1 + \lambda_2 = z \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = t \end{cases}$$

$$\iff \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = x \\ -\lambda_1 = y + x \\ 2\lambda_1 = z + x \\ 3\lambda_1 = 2x + t \end{cases}$$

$$\iff -(y + x) = \frac{z + x}{2} \text{ et } -(y + x) = \frac{2x + t}{3}$$

$$\iff 3x + 2y + z = 0 \text{ et } 5x + 3y + t = 0.$$

Ces deux dernières équations caractérisent les éléments de G :

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + 2y + z = 0 \text{ et } 5x + 3y + t = 0\}$$

3. **Barème : 2.25 points**

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F \cap G &\iff \begin{cases} 2x - 4y + z + t = 0 \\ 3x - y + 4z - t = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 5x + 3y + t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - 4y + z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 3x + 7y - z = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow \frac{1}{5}(L_1 + L_2) \\ & & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ &\iff \begin{cases} 2x - 4y + z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ & & L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -\frac{2}{3}x \\ z = y - x = -\frac{5}{3}x \\ t = 4y - 2x - z = -3x \end{cases}$$

Ainsi, $F \cap G = \text{Vect}((3, -2, -5, -9))$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $w = (3, -2, -5, -9)$

4. **Barème : 0.75 point**

On vérifie aisément que $u \in H$ et $v \in H$ (les composantes de ces deux vecteurs vérifient l'équation de H).

On en déduit que $\text{Vect}(u, v) \subset H$, donc $F \subset H$

De même, $a \in H$ et $b \in H$, donc $G \subset H$

5. **Barème : 2 points**

Méthode 1 : on détermine une équation de l'espace vectoriel $F + G$

$$F + G = \text{Vect}(u, v, a, b).$$

$(x, y, z, t) \in F + G \Longleftrightarrow$ il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 a + \lambda_4 b = (x, y, z, t)$

$$\Longleftrightarrow \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_1 & & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = x \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & -2\lambda_3 & +\lambda_4 & = y \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 & = z \\ 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 & = t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_1 & & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = x \\ & \lambda_2 & -3\lambda_3 & +2\lambda_4 & = y - x \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 & = z \\ 3\lambda_2 & -\lambda_3 & +4\lambda_4 & = t - 2x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_1 & & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = x \\ & \lambda_2 & -3\lambda_3 & +2\lambda_4 & = y - x \\ & & 4\lambda_3 & -\lambda_4 & = z - y + x \\ & & 8\lambda_3 & -2\lambda_4 & = t + x - 3y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow 2(z - y + x) = t + x - 3y$$

$$\Longleftrightarrow x + y + 2z - t = 0 \quad \text{on reconnaît l'équation de } H$$

Ainsi, $F + G = H$

Méthode 2 : on procède par double inclusion

F et G sont des sous-espaces vectoriels de H , donc $F + G \subset H$.

$$(x, y, z, t) \in H \Longleftrightarrow x + y + 2z - t = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z \\ t = x + y + 2z \end{cases}$$

On en déduit que $H = \{(x, y, z, x + y + 2z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(w_1, w_2, w_3)$ avec $w_1 = (1, 0, 0, 1)$ et $w_2 = (0, 1, 0, 1)$ et $w_3 = (0, 0, 1, 2)$

On rappelle que $F = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 1, 0, 2)$ et $v = (0, 1, 1, 3)$ et $G = \text{Vect}(a, b)$.

On vérifie que :

- $w_1 = \frac{3}{4}u - \frac{1}{4}v + \frac{1}{4}a$
- $w_2 = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v - \frac{1}{4}a$
- $w_3 = -\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v + \frac{1}{4}a$

Cela prouve que $w_1 \in F + G$, $w_2 \in F + G$ et $w_3 \in F + G$

On en déduit que : $\text{Vect}(w_1, w_2, w_3) \subset F + G$, c'est-à-dire : $H \subset F + G$.

Méthode 3 : on utilise les résultats sur les dimensions

F et G sont des sous-espaces vectoriels de H , donc $F + G \subset H$.

On sait également que : $\dim(F) = 2$, $\dim(G) = 2$ et $\dim(F \cap G) = 1$.

Donc d'après la formule de Grassmann, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 3$.

Comme $F + G \subset H$, on a $\dim(F + G) \leq \dim(H)$, donc $3 \leq \dim(H)$.

De plus, H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ distinct de $\mathbb{R}^4$, donc $\dim(H) < 4$.

On en déduit que $\dim(H) = 3$.

On a ainsi $F + G \subset H$ et $\dim(F + G) = \dim(H)$: par conséquent, $F + G = H$