

1. **Exercice 1 :**

a) L'espace probabilisé choisi est $\Omega = [[1, 6]]^4$ muni de la probabilité uniforme : $\text{Card}(\Omega) = 6^4$.

On note A l'événement "on obtient au moins un 6".

L'événement complémentaire $\bar{A}$ est "on n'obtient aucun 6", et donc correspond à l'ensemble des quadruplets de Ω dont aucune composante n'est égale à 6.

On a $\text{Card}(\bar{A}) = 5^4$, d'où $P(\bar{A}) = \frac{5^4}{6^4}$.

On déduit que $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{671}{1296} \simeq 0.52$.

b) Même chose ici. $\Omega = ([1, 6] \times [1, 6])^{24}$. $\text{Card}(\Omega) = 36^{24}$.

B est l'événement : "on obtient au moins une fois le double 5".

$\bar{B}$ est l'événement : "on n'obtient aucun double 5".

$\text{Card}(\bar{B}) = 35^{24}$.

On a donc : $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \simeq 0.49$.

2. **Exercice 2 :**

On numérote les joueurs de 1 à 4.

On distribue 13 cartes au premier joueur ($\binom{52}{13}$ possibilités), puis 13 cartes au second ($\binom{39}{13}$ possibilités), puis 13 cartes au troisième ($\binom{26}{13}$ possibilités) et enfin on donne les 13 dernières cartes au quatrième.

On obtient :

$$\text{Card}(\Omega) = \binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13} = \frac{52!}{(13!)^4}$$

On munit Ω de la probabilité uniforme.

On note A l'événement "chaque joueur a reçu un as".

On dénombre les distributions donnant un as à chaque joueur : on donne un as puis 12 autres cartes au joueur 1 (on choisit pour cela un as parmi 4 cartes puis 12 cartes parmi 48 : $\binom{4}{1} \binom{48}{12}$ possibilités), puis on donne un as puis 12 autres cartes au joueur 2 ($\binom{3}{1} \binom{36}{12}$ possibilités), puis on donne un as puis 12 autres cartes au joueur 3 ($\binom{2}{1} \binom{24}{12}$ possibilités) et enfin on donne le dernier as et les douze dernières cartes au joueur 4.

On obtient :

$$\text{Card}(A) = 4 \binom{48}{12} \times 3 \binom{36}{12} \times 2 \binom{24}{12} = \frac{24 \times 48!}{(12!)^4} \text{ puis } P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{24 \times 13^4}{52 \times 51 \times 50 \times 49} = \frac{2197}{20825} \simeq 0.105$$

3. **Exercice 3 :**

On prend comme univers Ω l'ensemble des parties à 3 éléments de l'ensemble des 32 cartes : $\text{Card}(\Omega) = \binom{32}{3}$.

Comme les cartes sont tirées au hasard, on munit Ω de la probabilité uniforme.

a) A : "on a trois piques". $\text{Card}(A) = \binom{8}{3}$. $P(A) = \frac{7}{620}$.

b) B : "on a trois as". $\text{Card}(B) = \binom{4}{3}$. $P(A) = \frac{1}{1240}$.

c) C : "on a 2 piques et 1 carreau". $\text{Card}(C) = \binom{8}{2} \times \binom{8}{1}$. $P(C) = \frac{7}{155}$.

4. **Exercice 4 :**

a) Ω est l'ensemble des parties à 3 éléments d'un ensemble à 12 éléments (il y a 12 boules).

$$\text{Card}(\Omega) = \binom{12}{3} = 220.$$

Comme les boules sont tirées au hasard, on munit Ω de la probabilité uniforme.

A : "les 3 boules sont de la même couleur"

C_1 : "les 3 boules sont blanches", C_2 : "les 3 boules sont noires", C_3 : "les 3 boules sont bleues".

$A = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ et les événements de cette union sont 2 à 2 incompatibles.

$$\text{Card}(C_1) = \binom{5}{3} = 10, \text{Card}(C_2) = \binom{4}{3} = 4 \text{ et } \text{Card}(C_3) = \binom{3}{3} = 1.$$

$$\text{D'où } P(A) = \frac{10}{220} + \frac{4}{220} + \frac{1}{220} = \frac{3}{44}$$

B : "les 3 boules sont de couleur différente"

$$\text{Card}(B) = \binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1} = 60, \text{ d'où } P(B) = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}.$$

b) Ω est l'ensemble des 3-listes d'un ensemble à 12 éléments. $\text{Card}(\Omega) = 12^3 = 1728$.

On munit Ω de la probabilité uniforme et on garde les notations du premier cas.

C_1 est l'ensemble des 3-listes d'un ensemble à 5 éléments. $\text{Card}(C_1) = 5^3 = 125$.

De même, $\text{Card}(C_2) = 4^3 = 64$ et $\text{Card}(C_3) = 3^3 = 27$.

$$\text{D'où } P(A) = \frac{216}{1728} = \frac{1}{8}.$$

On note D_1 : "la première boule est blanche, la seconde est noire, la troisième est bleue".

$$\text{Card}(D_1) = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

L'événement B est la réunion disjointe de 6 événements de même type que D_1 (il y a $3! = 6$ ordre possibles pour les 3 couleurs).

$$\text{D'où } \text{Card}(B) = 6 \times 60 = 360, \text{ et } P(B) = \frac{360}{1728} = \frac{5}{24}.$$

c) Ω est l'ensemble des 3-arrangements d'un ensemble à 12 éléments. $\text{Card}(\Omega) = 12 \times 11 \times 10 = 1320$.

On munit Ω de la probabilité uniforme.

C_1 est l'ensemble des 3-arrangements d'un ensemble à 5 éléments. $\text{Card}(C_1) = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

C_2 est l'ensemble des 3-arrangements d'un ensemble à 4 éléments. $\text{Card}(C_2) = 4 \times 3 \times 2 = 24$.

C_3 est l'ensemble des 3-arrangements d'un ensemble à 3 éléments. $\text{Card}(C_3) = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

$$\text{D'où } P(A) = \frac{60 + 24 + 6}{1320} = \frac{3}{44}.$$

B : "les 3 boules sont de couleur différente"

D_1 : "la première boule est blanche, la seconde est noire, la troisième est bleue".

$$\text{On a : } \text{Card}(D_1) = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

L'événement B est encore la réunion disjointe de 6 événements de même probabilité égale à celle de D_1 .

$$\text{Ainsi } P(B) = \frac{6 \times 60}{1320} = \frac{3}{11}.$$

Remarque : on obtient les mêmes résultats que lors du tirage simultané. Cela s'explique par le fait que dans les événements A et B l'ordre des boules de tirage n'importe pas. On peut donc s'intéresser seulement au résultat final des trois tirages, ce qui revient à faire un tirage simultané de 3 boules.

E : "la première boule blanche est tirée au troisième tirage".

E est l'ensemble des triplets dont les deux premières composantes forment un arrangement d'un ensemble à 7 éléments et la troisième composante correspond à un numéro de boule blanche.

$$\text{Card}(E) = 7 \times 6 \times 5 = 210. \quad P(E) = \frac{7}{44}.$$

F : "la deuxième boule blanche est tirée au troisième tirage"

F est la réunion disjointe des événements F_1 et F_2 avec F_i : "la i ème boule et la troisième boule sont blanches, l'autre n'est pas blanche".

$$\text{Card}(F_1) = 5 \times 7 \times 4 \text{ et } \text{Card}(F_2) = 7 \times 5 \times 4.$$

$$\text{D'où } P(F) = \frac{280}{1320} = \frac{7}{33}.$$

5. Exercice 5 :

a) On note R_i l'événement : "la i ème boule tirée est rouge".

On cherche à déterminer $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4)$.

Sous réserve que les probabilités conditionnelles soient bien définies, on a d'après la formule des probabilités composées :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) = P(R_1)P(R_2|R_1)P(R_3|R_1 \cap R_2)P(R_4|R_1 \cap R_2 \cap R_3)$$

Comme les boules sont indiscernables au toucher, P est la probabilité uniforme, et $P(R_1) = \frac{r}{n}$.

Si la première boule tirée est rouge, comme les tirages se font sans remise, il reste $n - 1$ boules dont r_1 rouges.

$$\text{Par conséquent, } P(R_2|R_1) = \frac{r-1}{n-1}.$$

On en déduit que $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) \neq 0$, et la probabilité conditionnelle $P(R_3|R_1 \cap R_2)$ est bien définie.

Si les deux premières boules sont rouges, il reste avant le troisième tirage $n - 2$ boules dont $r - 2$ rouges, donc

$$P(R_3|R_1 \cap R_2) = \frac{r-2}{n-2}.$$

On obtient alors $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1 \cap R_2)P(R_3|R_1 \cap R_2) \neq 0$, et donc la probabilité conditionnelle $P(R_4|R_1 \cap R_2 \cap R_3)$ est bien définie.

Comme précédemment, on obtient $P(R_4|R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{r-3}{n-3}$.

Ainsi, $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) = \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

b) On note A_k : "une boule rouge apparaît pour la première fois au k -ième tirage"

B_i : "la i ème boule tirée est blanche".

On a : $A_k = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap R_k$

Sous réserve que les probabilités conditionnelles soient bien définies, on a d'après la formule des probabilités composées :

$$P(A_k) = P(B_1)P(B_2|B_1) \dots P(B_{k-1}|B_1 \cap \dots \cap B_{k-2})P(R_k|B_1 \cap \dots \cap B_{k-1})$$

On a $P(B_1) = \frac{b}{n}$, puis $P(B_2|B_1) = \frac{b-1}{n-1}$.

On en déduit que $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) \neq 0$.

On suppose que $P(B_1 \cap \dots \cap B_i) \neq 0$ pour $2 \leq i \leq k-2 < b$.

On obtient $P(B_{i+1}|B_1 \cap \dots \cap B_i) = \frac{b-i}{n-i} \neq 0$ et donc

$P(B_1 \cap \dots \cap B_i \cap B_{i+1}) = P(B_1 \cap \dots \cap B_i)P(B_{i+1}|B_1 \cap \dots \cap B_i) \neq 0$.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, l'événement $B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}$ est de probabilité non nulle et :

$$P(R_k|B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) = \frac{r}{n-k+1}$$

On obtient :

$$P(A_k) = \frac{b(b-1) \dots (b-k+2)r}{n(n-1) \dots (n-k+1)}$$

6. Exercice 7 :

On introduit les événements suivants :

- N : « la boule tirée est noire »
- B : « la boule tirée est blanche »
- S_N : « Sylvie annonce que la boule tirée est noire »
- J_N : « Jacques annonce que la boule tirée est noire »
- S_B : « Sylvie annonce que la boule est blanche »
- J_B : « Jacques annonce que la boule est blanche »
- S_{ment} : « Sylvie ment »
- J_{ment} : « Jacques ment »

Interprétation des données de l'énoncé :

$$P(N) = \frac{3}{10} \text{ et } P(B) = \frac{7}{10}$$

Les événements S_{ment} , J_{ment} et N sont mutuellement indépendants.

$$S_{ment} = (B \cap S_N) \cup (N \cap S_B) \text{ et } \overline{S_{ment}} = (B \cap S_B) \cup (N \cap S_N)$$

$$\text{On a, par exemple, } N \cap S_{ment} = \underbrace{(N \cap B \cap S_N)}_{=\emptyset} \cup (N \cap N \cap S_B) = N \cap S_B$$

On peut aussi noter que (même si cette probabilité conditionnelle ne sera pas utilisée lors de la résolution de l'exercice) $P_N(S_B) = \frac{1}{10}$: la probabilité que Sylvie annonce que la boule est blanche sachant qu'elle est noire est égale à la probabilité qu'elle mente.

$$\text{On retrouve ce résultat par le calcul : } P_N(S_B) = \frac{P(N \cap S_B)}{P(N)} = \frac{P(N \cap S_{ment})}{P(N)} = \frac{P(N) \times P(S_{ment})}{P(N)} = P(S_{ment})$$

Résolution de l'exercice :

On détermine la valeur de $P(N | S_B \cap J_N)$.

$$\text{On a : } P(N | S_B \cap J_N) = \frac{P(N \cap S_B \cap J_N)}{P(S_B \cap J_N)}$$

Les événements N et B forment un système complet d'événements :

$$P(S_B \cap J_N) = P(S_B \cap J_N \cap N) + P(S_B \cap J_N \cap B)$$

$$\text{Or } S_B \cap J_N \cap N = S_{ment} \cap \overline{J_{ment}} \cap N,$$

d'où $P(S_B \cap J_N \cap N) = P(S_{ment}) \times P(\overline{J_{ment}}) \times P(N)$ par indépendance des événements

$$= \frac{1}{10} \times \frac{19}{20} \times \frac{3}{10} = \frac{57}{2000}$$

Et $S_B \cap J_N \cap B = \overline{S_{ment}} \cap J_{ment} \cap N$,

d'où $P(S_B \cap J_N \cap B) = P(\overline{S_{ment}}) \times P(J_{ment}) \times P(B)$ par indépendance des événements

$$= \frac{9}{10} \times \frac{1}{20} \times \frac{7}{10} = \frac{63}{2000}$$

On obtient donc $P(S_B \cap J_N) = \frac{120}{2000}$

Ainsi, $P(N | S_B \cap J_N) = \frac{57}{120} = \frac{19}{40}$ et $P(B | S_B \cap J_N) = \frac{21}{40}$.

Il est (un peu) plus probable que la boule prélevée soit blanche, on préfère croire Sylvie.

Remarque : attention, la notion d'indépendance est une notion probabiliste.

On peut vérifier que les événements S_B et J_N sont indépendants par rapport à la probabilité P_N (et par rapport à la probabilité P_B), mais qu'ils ne le sont pas pour la probabilité P (car ils dépendent de N et de B).

$$P_N(S_B \cap J_N) = \frac{P(N \cap S_B \cap J_N)}{P(N)} = \frac{P(N \cap S_{ment} \cap \overline{J_{ment}})}{P(N)} = P(S_{ment}) \times P(\overline{J_{ment}}) = P_N(S_B) \times P_N(J_N)$$

$$P(S_B) = P(S_B \cap N) + P(S_B \cap B) = P(S_{ment} \cap N) + P(\overline{S_{ment}} \cap B) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{66}{100}$$

$$\text{Et } P(J_N) = P(J_N \cap N) + P(J_N \cap B) = P(\overline{J_{ment}} \cap N) + P(J_{ment} \cap B) = \frac{19}{20} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{20} \times \frac{7}{10} = \frac{64}{200}$$

On a vu que $P(S_B \cap J_N) = \frac{120}{2000}$. Donc $P(S_B \cap J_N) \neq P(S_B) \times P(J_N)$.

Complément : on a $P(B) = \frac{7}{10}$

$$\text{On a : } P(B | S_B) = \frac{P(B \cap S_B)}{P(S_B)} = \frac{63}{66} \simeq 0.95.$$

L'annonce de Sylvie (dont les propos sont fiables vu qu'elle ne ment qu'une fois sur 10) augmente considérablement la probabilité que la boule tirée soit blanche.

$$\text{On a : } P(B | J_B) = \frac{P(B \cap J_B)}{P(J_B)} = \frac{133}{136} \simeq 0.98 \text{ et } P(B | J_N) = \frac{P(B \cap J_N)}{P(J_N)} = \frac{7}{64} \simeq 0.11$$

Si Jacques annonce que la boule tirée est blanche, la probabilité qu'elle soit blanche augmente davantage (les propos de Jacques sont plus fiables encore).

Par contre, s'il annonce que la boule tirée est noire, alors la probabilité qu'elle soit blanche diminue fortement. En tenant compte des deux informations contradictoires de Sylvie et Jacques, bien qu'on accorde plus de crédit aux propos de Jacques, la probabilité que la boule tirée soit blanche reste supérieure à $\frac{1}{2}$.

7. Exercice 10 : (difficile)

Pour simplifier, on peut supposer que les lettres à distribuer portent des numéros, et même plus précisément que celles pour la boîte 1 sont les lettres 1, 2, ..., r_1 , celles pour la boîte 2 sont $r_1 + 1$, ..., $r_1 + r_2$, ..., celles pour la boîte p sont $r_1 + \dots + r_{p-1} + 1$, ..., $r_1 + \dots + r_p = n$.

Une distribution revient à associer à chaque lettre un numéro de boîte à lettres entre 1 et p .

Ω est donc l'ensemble des applications de $[1, n]$ vers $[1, p]$: $\text{Card}(\Omega) = p^n$.

On munit Ω de la probabilité uniforme.

a) Parmi toutes les distributions, il n'y en a qu'une seule de correcte.

De ce fait, la probabilité cherchée est $\frac{1}{p^n}$.

b) Pour que la boîte 1 soit correctement remplie, il faut que le facteur lui attribue les lettres 1, 2, ..., r_1 et qu'il distribue les lettres $r_1 + 1$, ..., n (ce qui représente $n - r_1$ lettres) dans les $p - 1$ autres boîtes. Il y a donc

$$(p - 1)^{n-r_1} \text{ choix possibles et la probabilité cherchée est } \frac{(p - 1)^{n-r_1}}{p^n}.$$

c) Dire cette fois qu'il n'y a pas dans la boîte 1 de lettre destiné à un voisin c'est dire que toutes les lettres $r_1 + 1$, ..., n sont attribuées aux boîtes 2 à p et que celles numérotées de 1 à r_1 peuvent être mises dans n'importe quelle boîte (elles ne sont pas toutes nécessairement dans la boîte 1, contrairement à la question précédente). Le

nombre de possibilités est donc cette fois égal à $p^{r_1} (p - 1)^{n-r_1}$ et la probabilité cherchée est $\frac{p^{r_1} (p - 1)^{n-r_1}}{p^n}$.

d) On peut décrire l'événement comme suit : on choisit r_1 lettres parmi les n et on les attribue à la boîte 1, on choisit r_2 lettres parmi les $n - r_1$ restantes et on les attribue à la boîte 2, A la dernière étape, il restera exactement r_p lettres qui seront mises dans la boîte p .

Le nombre de possibilités est par conséquent $\binom{n}{r_1} \binom{n-r_1}{r_2} \dots \binom{r_p}{r_p}$. Cette quantité peut se simplifier en $\frac{n!}{r_1! \dots r_p!}$. La probabilité cherchée est donc $\frac{n!}{r_1! \dots r_p! p^n}$.

8. **Exercice 13 :**

(a) Notons A_n l'événement : « on joue avec la pièce A au n -ième lancer ».

Les événements A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = P(A_{n+1} | A_n)P(A_n) + P(A_{n+1} | \overline{A_n})P(\overline{A_n})$$

Or $P(A_{n+1} | A_n)$ est égal à la probabilité d'obtenir face avec la pièce A ,

Et $P(A_{n+1} | \overline{A_n})$ est égal à la probabilité d'obtenir pile avec la pièce B .

$$\text{D'où } p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}(1 - p_n) = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3}. \quad (\mathbf{2 \text{ points}})$$

On introduit la suite u de terme général $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{6}\left(u_n + \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{15} \\ &= \frac{1}{6}u_n. \end{aligned}$$

u est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$, donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{u_1}{6^{n-1}}$

$$\text{Or } p_1 = \frac{1}{2}, \text{ d'où } u_n = \frac{1}{10 \times 6^{n-1}}, \text{ puis } \boxed{p_n = \frac{1}{10 \times 6^{n-1}} + \frac{2}{5}}$$

(b) Notons F_n l'événement : « on obtient face au n -ième lancer ».

Les événements A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(F_n) &= P(F_n | A_n)P(A_n) + P(F_n | \overline{A_n})P(\overline{A_n}) \\ &= \frac{1}{2}p_n + \frac{2}{3}(1 - p_n) \\ &= -\frac{1}{6}p_n + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{P(F_n) = \frac{3}{5} - \frac{1}{10 \times 6^n}}$$