

1. **Continuité uniforme.** Théorème de Heine.

2. **Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment.**

Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision.

3. **Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.**

Linéarité, positivité, croissance de l'intégrale. Relation de Chasles.

Inégalité triangulaire : $|\int_{[a,b]} f| \leq \int_{[a,b]} |f|$

Brève extension des résultats aux fonctions à valeurs complexes.

Sommes de Riemann : si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} ,

alors $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$. Démonstration dans le cas où f est M -lipschitzienne.

4. **Intégrale d'une fonction continue sur un segment.**

Théorème fondamental du calcul intégral. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives. Intégration par parties, changement de variables.

Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, positive et si $\int_a^b f(x) dx = 0$, alors f est identiquement nulle.

5. Pour une fonction f de classe C^{n+1} , formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n .

Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction f de classe C^{n+1} .

QUESTIONS DE COURS

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction M -lipschitzienne. On pose $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ avec $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

Démontrer que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$.

2. Démonstration du résultat suivant :

si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, positive et si $\int_a^b f(x) dx = 0$, alors f est nulle.

3. Énoncé et démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n .

Présentation de la question de cours 1 :

$$\bullet \left| \int_a^b f(t) dt - S_n \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right|$$

$$\text{Or } \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} M |t - x_k| dt.$$

$$\text{Et } \int_{x_k}^{x_{k+1}} M |t - x_k| dt = M \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt = M \left[\frac{(t - x_k)^2}{2} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} = M \frac{h^2}{2} \text{ avec } h = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$$

(pas de la subdivision)

$$\bullet \text{ Ainsi, } \left| \int_a^b f(t) dt - S_n \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M \frac{h^2}{2} = M \times n \times \frac{h^2}{2} = \frac{M(b-a)^2}{2n}$$