Programme de colle pour la semaine du 18 mai

mathématiques MPSI : semaine 27

---

1. **Matrice d'une application linéaire dans des bases**
   Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ donnée.
   Matrice $\mathrm{Mat}_{B,C}(u)$ d'une application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ où B est une base de E, et C une base de F.
   Matrice d'un endomorphisme dans un base.
   Isomorphisme $u \mapsto \mathrm{Mat}_{B,C}(u)$.
   Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.
   Matrice d'une composée d'applications linéaires.
   Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.
   Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

   Matrices de passage d'une base à une une autre.
   Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.
   Formules de changement de bases.

2. **Application linéaire canoniquement associée à une matrice.**
   Noyau, image et rang d'une matrice.
   Conditions d'inversibilité d'une matrice carrée.
   Méthodes pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée inversible.

3. **Matrices équivalentes et rang**
   Deux matrices A et B de de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
   Invariance du rang par transposition.
   Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.
   Les opérations élémentaires conservent le rang. Application au calcul du rang : algorithme du pivot.

4. **Matrices semblables et trace**
   Linéarité de la trace. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
   Trace d'un endomorphisme. Trace d'un projecteur.

Questions de cours :

— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  Démontrer que si $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Ker}(QA) = \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{rg}(QA) = \mathrm{rg}(A)$
  Démontrer que si $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Im}(AP) = \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(A)$

— Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit p un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
