Exercice : racine carrée d'un endomorphisme

Partie I : étude de deux exemples :

1. On suppose qu'il existe un endomorphisme g tel que $g \circ g = f$.

   Soit $y \in \text{Im}(f)$: il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
   Comme $g \circ g = f$, on a : $y = g(g(x))$.
   En posant $t = g(x)$, $t \in E$ et $g(t) = y$.
   Par conséquent, $y \in \text{Im}(g)$.
   On a ainsi montré que $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(g)$.

   On déduit alors que : $\text{rg}(f) \leq \text{rg}(g) \leq 3$.
   Si $\text{rg}(g) = 3$, alors g est surjective, et f est également surjective (comme composée de deux applications surjectives).
   Ce qui est exclu vu que $\text{rg}(f) \neq 3$.
   On obtient donc que $\text{rg}(g) = 2$.

   De $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(g)$ et $\text{rg}(f) = \text{rg}(g)$, $\boxed{\text{on déduit que } \text{Im}(f) = \text{Im}(g)}$ **(2 pts)**

   Soit $x \in \text{Ker}(g)$.
   $f(x) = g\big(g(x)\big) = g(0) = 0$ (car g est linéaire), et ainsi $x \in \text{Ker}(f)$.
   On a montré que $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$.

   D'après le théorème du rang, $\dim\big(\text{Ker}(f)\big) = \dim(E) - \text{rg}(f) = 1$.
   On a de même, $\dim\big(\text{Ker}(g)\big) = \dim(E) - \text{rg}(g) = 1$.

   L'égalité des dimensions permet alors de conclure que $\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)}$ **(2 pts)**

2. (a) $f(1) = 0$, $f(X) = 1$ et $f(X^2) = 2X$, donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ **(0.5 pt)**

   (b) Il est clair que $\text{Im}(M) = \text{Vect}(C_2, C_3)$, ce qui permet de déduire que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$ et $\text{rg}(f) = 2$.
   On a aussi $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(1)$.

   Le résultat préliminaire s'applique ici, ce qui permet de déduire que $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(f)$, donc $g(1) = 0$.
   Et $\text{Im}(g) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$.
   Par conséquent, $g(X)$ et $g(X^2)$ appartiennent à $\mathbb{R}_1[X]$:
   il existe $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(X) = a + cX$ et il existe $(b, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(X^2) = b + dX$.

   $\boxed{\text{On a alors } N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ **(2 pts)**

   (c) $g \circ g = f$, donc $N^2 = M$.
   Or $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & ac & ad \\ 0 & c^2 & cd \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   On déduit alors que $c^2 = 0$, donc $c = 0$, **ce qui est contradictoire avec** $ac = 1$. **(1.25 pt)**

3. (a) $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

   Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On résout le système $PX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$PX = Y \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & y_2 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & y_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 & \\ & & 3x_2 & + & x_3 & = & y_2 + 2y_1 & \quad L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1 \\ & & x_2 & & & = & y_3 - y_1 & \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - 2y_3 \\ x_3 = -y_1 + y_2 + 3y_3 \\ x_2 = y_3 - y_1 \end{cases}$$

Le système admet une unique solution. $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$ **(2.5 pts)**

Comme la matrice de la famille (u_1, u_2, u_3) est inversible, on déduit que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$

(b) On a : $f(u_1) = (1, -2, 1) = u_1$, $f(u_2) = (4, 4, 0) = 4u_2$ et $f(u_3) = (0, 0, 0)$.

$\boxed{\text{On en déduit que } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ **(0.5 pt)**

Il est clair que $\mathrm{rg}(M) = 2$, et donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u_1, 4u_2)$.
Les vecteurs u_1 et u_2 sont deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathrm{Im}(f)$, donc forment une base de $\mathrm{Im}(f)$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.
u_3 étant un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f)$, il forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$. **(2 pts)**

(c) i. Comme $\mathrm{rg}(f) = 2$, les résultats de la question 1 s'appliquent.
La famille (u_1, u_2) est donc une base de $\mathrm{Im}(g)$:
il existe $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(u_1) = au_1 + cu_2$ et il existe $(b, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(u_2) = bu_1 + du_2$.
Et u_3 appartient à $\mathrm{Ker}(g)$: $g(u_3) = 0$.

$\boxed{\text{Ce qui donne } N = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ **(1 pt)**

ii. On a $N^2 = M$ et $N^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) & 0 \\ c(a + d) & bc + d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On déduit alors : $a^2 + bc = 1$, $d^2 + bc = 4$, $c(a + d) = 0$ et $b(a + d) = 0$.
Les deux premières relations montrent que $a^2 < d^2$, donc $|a| < |d|$.
Par conséquent, $a + d \neq 0$.

$\boxed{\text{On en déduit que } b = c = 0, \text{ puis } a^2 = 1 \text{ et } d^2 = 4}$ **(1.5 pt)**

(d) D'après ce qui précède, s'il existe une racine carrée g de f, alors sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est l'une des quatre matrices suivantes : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Cela prouve que f admet au plus quatre racines carrées.
Réciproquement, si N est l'une de ces quatre matrices, alors $N^2 = M$, et donc l'application g dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est N vérifie $g \circ g = f$.

$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ admet donc exactement 4 racines carrées}}$ **(1.5 pt)**

Traitons le cas où la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ est $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice N' de g dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ vérifie (d'après les formules de changement de bases) :

$$N' = PNP^{-1}$$

Après calculs, on trouve $N' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Ce qui permet de déduire que } g(x, y, z) = \big(3x - y - 4z, 2y + 2z, x - y - 2z\big)}$ **(1.5 pt)**

Voici les autres possibilités pour g :

- $g(x, y, z) = \big(x + y, 4x - 2y - 6z, -x + y + 2z\big)$
- $g(x, y, z) = \big(-x - y, -4x + 2y + 6z, x - y - 2z\big)$
- $g(x, y, z) = \big(-3x + y + 4z, -2y - 2z, -x + y + 2z\big)$

Partie II : étude de deux autres exemples :

1. On trouve $S_\theta^2 = I_2$.
   L'application linéaire g_θ canoniquement associée à S_θ vérifie $g_\theta^2 = \mathrm{Id}$, donc est une racine carrée de Id.
   Il y en a une infinité, car les applications g_θ avec $\theta \in [0, 2\pi[$ sont deux à deux distinctes. **(1.25 pt)**

2. (a) La matrice de f dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   On vérifie que $M^2 = I_4$, donc $f^2 = \mathrm{Id}$. $\boxed{f \text{ est une symétrie}}$ **(1 pt)**

   (b) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$
   $(x, y, z, t) \in G \iff f(x, y, z, t) = -(x, y, z, t)$

   $$\iff \begin{cases} x & = & -x \\ 2x + y + 2t & = & -y \\ -2x + z - 2t & = & -z \\ -2x - t & = & -t \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

   On obtient un système à 3 équations principales, on exprime alors x, y, z et t à l'aide du paramètre t

   $$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \\ t = t \end{cases}$$

   On en déduit que : $G = \Big\{(0, -t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\Big\} = \mathrm{Vect}\big((0, -1, 1, 1)\big)$.

   $\boxed{G \text{ est une droite vectorielle}}$ **(1.5 pt)**

   Justification plus rapide : on note F la direction de la symétrie F
   On montre que : $(x, y, z, t) \in F \iff f(x, y, z, t) = (x, y, z, t) \iff x + t = 0$
   F est donc un hyperplan.
   Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$, on déduit que $\dim(G) = 1$.

   (c) i. $g \circ f = g \circ (g \circ g) = (g \circ g) \circ g = f \circ g$. **(0.5 pt)**

   ii. Soit $u \in G$.
   $f(g(u)) = g(f(u))$ car g et f communtent
   $= g(-u)$ car $u \in G$
   $= -g(u)$ par linéarité de g

   On en déduit que $\boxed{g(u) \in G}$ **(1 pt)**

   Le vecteur $x = g(u)$ vérifie en effet $f(x) - x$.

   iii. Considérons un vecteur non nul u de G.
   Comme G est une droite vectorielle, on a $G = \mathrm{Vect}(u)$.
   D'après la question précédente, $g(u) \in \mathrm{Vect}(u)$: $g(u)$ est colinéaire à u.
   Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = \lambda u$.
   On a alors $f(u) = -u$ et $f(u) = g(g(u)) = g(\lambda u) = \lambda g(u) = \lambda^2 u$.
   Comme u est non nul, on obtient alors : $\lambda^2 = -1$. **Contradiction.** **(1.5 pt)**
