Programme de colle pour la semaine du 1 juin

mathématiques MPSI : semaine 29

Probabilités

1. **Espérance d'une variable aléatoire :** $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

   Relation : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$.

   Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.

   Espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale.

   Espérance d'une variable suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$

   Formule de transfert : $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$.

   $E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y)$

   Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

   Si X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes, alors $E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$.

2. Moments d'une variable aléatoire. $E(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x)$.

   Variance d'une variable aléatoire : $V(X) = E((X - E(X))^2)$. Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

   Relation : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Relation : $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

   Covariance de deux variables aléatoires.

   Relation $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Rappel : $E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y)$

   Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

   Linéarité à gauche et à droite de la covariance.

   Relations entre variance et covariance. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$.

   Variance d'une somme de n variables aléatoires.

   Variance d'une somme de n variables aléatoires décorrélées.

   Variance d'une somme de n variables aléatoires indépendantes.

   Variance d'une variable aléatoire de bernoulli, d'une variable aléatoire binomiale.

   Coefficient de corrélation.

3. **Inégalités probabilistes**

   Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.