

Correction de l'exercice 38 du TD 27 :

S est une somme de nombres positifs, donc S est bien définie et son résultat (éventuellement infini) ne dépend pas de l'ordre de sommation des termes.

$$\text{On effectue une sommation par paquets : } \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} I_k \quad \text{avec } I_k = \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m + n = k \right\} \\ = \left\{ (m, k - m) \text{ avec } m \in \llbracket 0, k \rrbracket \right\}$$

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^k \frac{3^m 2^{k-m}}{k!} \\ = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^k \frac{3^m 2^{k-m}}{k!} \\ = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2^k}{k!} \sum_{m=0}^k \left(\frac{3}{2} \right)^m \right) \\ = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2^k}{k!} \times \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^{k+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \right)$$

$$\text{Or } \frac{2^k}{k!} \times \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^{k+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{2^k}{k!} \times 2 \times \left(\frac{3^{k+1}}{2^{k+1}} - 1 \right) = \frac{3^{k+1}}{k!} - \frac{2^{k+1}}{k!}$$

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3^{k+1}}{k!} - \frac{2^{k+1}}{k!} \right)$$

$$S = 3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}$$

Ainsi, $S = 3e^3 - 2e^2$

Correction de l'exercice 40 du TD 27 :

S est une somme double infinie *triangulaire* de nombres positifs, donc est bien définie.

Pour le calcul de S , on va intervertir les deux sommes.

Pour faciliter la compréhension, on peut se ramener à une somme double infinie rectangulaire en posant :

$$u_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{k!} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } k < n \end{cases}$$

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \quad \text{théorème de Fubini}$$

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^k \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\text{Et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} \quad \text{le premier terme est nul}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{changement d'indices} \\ = e$$

Ainsi, $S = 2e$

Correction de l'exercice 42 du TD 27 : difficile

S est une somme de nombres positifs, donc S est bien définie et son résultat (éventuellement infini) ne dépend pas de l'ordre de sommation des termes.

$$\text{On note que : } \frac{1}{a^2b + ab^2 + 2ab} = \frac{1}{ab(a+b+2)} = \frac{1}{a(a+2)} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b+2} \right]$$

après décomposition de la fraction $F(X) = \frac{1}{aX(X+a+2)}$ en éléments simples

$$S = \sum_{a=1}^{+\infty} \frac{1}{a(a+2)} \sum_{b=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b+2} \right)$$

$$\text{Or } \sum_{b=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b+2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{b=1}^n \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b+2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{b=1}^n \frac{1}{b} - \sum_{b=a+3}^{n+a+2} \frac{1}{b} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{b=1}^{a+2} \frac{1}{b} - \sum_{b=n+1}^{n+a+2} \frac{1}{b} \right) = \sum_{b=1}^{a+2} \frac{1}{b}$$

$$\text{D'où } S = \sum_{a=1}^{+\infty} \sum_{b=1}^{a+2} \frac{1}{a(a+2)b}$$

$$\text{Notons } u_{a,b} = \begin{cases} \frac{1}{a(a+2)b} & \text{si } b \leq a+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } S &= \sum_{a=1}^{+\infty} \sum_{b=1}^{+\infty} u_{a,b} = \sum_{b=1}^{+\infty} \sum_{a=1}^{+\infty} u_{a,b} \\ &= \sum_{a=1}^{+\infty} u_{a,1} + \sum_{a=1}^{+\infty} u_{a,2} + \sum_{b=3}^{+\infty} \sum_{a=1}^{+\infty} u_{a,b} \\ &= \sum_{a=1}^{+\infty} \frac{1}{a(a+2)} + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{+\infty} \frac{1}{a(a+2)} + \sum_{b=3}^{+\infty} \sum_{a=b-2}^{+\infty} \frac{1}{a(a+2)b} \\ &= \frac{3}{2} \sum_{a=1}^{+\infty} \frac{1}{a(a+2)} + \sum_{b=3}^{+\infty} \frac{1}{b} \sum_{a=b-2}^{+\infty} \frac{1}{a(a+2)} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \sum_{a=1}^{+\infty} \frac{1}{a(a+2)} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

$$\text{Et } \sum_{a=b-2}^{+\infty} \frac{1}{a(a+2)} = \frac{1}{2} \sum_{a=b-2}^{+\infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b-2} + \frac{1}{b-1} \right)$$

$$\text{D'où } S = \frac{9}{8} + \frac{1}{2} \sum_{b=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{b(b-2)} + \frac{1}{b(b-1)} \right)$$

$$\text{Comme } \sum_{b=3}^{+\infty} \frac{1}{b(b-2)} = \sum_{b=1}^{+\infty} \frac{1}{b(b+2)} = \frac{3}{4} \text{ et } \sum_{b=3}^{+\infty} \frac{1}{b(b-1)} = \sum_{b=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{b-1} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{2}, \text{ on obtient :}$$

$$\boxed{S = \frac{9}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{4}}$$
