

1. **Présentation des copies :**

- Laisser une marge à gauche d'au moins 4 cm.
- Numéroté les feuilles des copies rendues.
- Ne pas réécrire le sujet sur la copie.
- Limiter l'usage du blanco ou d'autre correcteur.
- **Mettre en évidence les résultats définitifs.**

2. **Conduite d'une démonstration :**

- **Ne pas partir du résultat à prouver.**

L'objectif d'une démonstration est de parvenir au résultat souhaité (par des déductions successives).

- **Articuler les raisonnements :** on ne doit pas remplacer les articulations logiques "donc", "alors", "par conséquent" par le symbole $\implies$ ou le symbole $\iff$.
- **Maîtriser l'usage du symbole $\iff$.**

On utilise le symbole $\iff$ pour

- la résolution d'équations ou d'inéquations par équivalences
- la preuve que deux propositions sont équivalentes
- la recherche de conditions pour qu'une proposition soit vraie

EXERCICE 1 : CALCULS DE SOMMES ET DE LIMITES (5 POINTS)

1. $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, et $S_3 = S_2 + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$. **0.5 pt**

On se propose de démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Soit $P(n) : S_n = \frac{n}{n+1}$.

$P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \text{On a : } S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{d'après } P(n). \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n}{n+1}$

1.5 pt

2. On a : $t_k - t_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2) - k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$

D'où $\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k+1}) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = 2T_n$

0.75 pt

On a également $\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k+1}) = t_1 - t_{n+1}$ (somme télescopique).

Ainsi, $T_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$

0.75 pt

EXERCICE 2 : CALCUL ALGÈBRE

1. On procède ici à une récurrence de pas double.

- Soit $P(n) : \ll u_n = n! \gg$
- $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
- On suppose $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un entier $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= (n+1)(u_n + u_{n+1}) \\ &= (n+1) \times [n! + (n+1)!] \quad \text{d'après } P(n) \text{ et } P(n+1) \\ &= (n+1) \times [n! + (n+1) \times n!] \\ &= (n+1) \times n! \times (1 + n + 1) \\ &= (n+2)! \end{aligned}$$

$P(n+2)$ est vraie.

On a ainsi montré par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = n!$ **(1.5 pt)**

2. $\boxed{\text{pour } x \neq 1, \sum_{k=1}^n x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}}$

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{j-i} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j \frac{2^j}{2^i} \right) = \sum_{j=1}^n 2^j \left(\sum_{i=1}^j \left(\frac{1}{2} \right)^i \right)$$

$$\text{Or : } \sum_{i=1}^j \left(\frac{1}{2} \right)^i = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{j+1}}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^j}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{j-i} &= \sum_{j=1}^n (2^j - 1) \\ &= \sum_{j=1}^n 2^j - \sum_{j=1}^n 1 \\ &= 2^{n+1} - 2 - n \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{j-i} = 2^{n+1} - 2 - n$ **(2 pts)**

EXERCICE 3 : FACTORIELLES ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

1. $K_2^5 = \frac{4! 10!}{2! 5! 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{2 \times 5} = 72$

$$K_6^3 = \frac{12! 6!}{6! 3! 9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 22 \times 10 = 220 \quad \textbf{(0.75 point)}$$

2. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

$$K_{n+1}^p = \frac{(2n+2)! (2p)!}{(n+1)! p! (n+p+1)!}$$

$$\text{Or } (2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)! = 2(n+1)(2n+1)(2n)!,$$

$$\text{Et } (n+1)! = (n+1)n!,$$

$$\text{D'où } \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{n!} \quad (\text{simplification par } (n+1))$$

$$\text{Donc } K_{n+1}^p = 2 \frac{(2n+1)(2n)!(2p)!}{n! p! (n+p+1)!}$$

$$\text{De même, on a : } K_n^{p+1} = 2 \frac{(2p+1)(2n)!(2p)!}{n! p! (n+p+1)!}$$

$$\text{Par conséquent, } K_{n+1}^p + K_n^{p+1} = 2 \frac{(2n+1+2p+1)(2n)!(2p)!}{n! p! (n+p+1)!}$$

$$= 2 \frac{2 \times (n+p+1)(2n)!(2p)!}{n!p!(n+p+1)(n+p)!}$$

$$= 4 \frac{(2n)!(2p)!}{n!p!(n+p)!}$$

Ainsi, $K_{n+1}^p + K_n^{p+1} = 4K_n^p$ (2 points)

3. Pour tout entier naturel p , $K_0^p = \frac{(2p)!}{p!p!} = \binom{2p}{p}$, donc $K_0^p \in \mathbb{N}$.

$P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

D'après la question b, $K_{n+1}^p = 4K_n^p - K_n^{p+1}$.

Or d'après $P(n)$, K_n^p et K_n^{p+1} sont des entiers naturels.

Par conséquent, K_{n+1}^p est un entier relatif.

Comme K_{n+1}^p est un quotient de factorielles, K_{n+1}^p est donc positif.

Par conséquent, $K_{n+1}^p \in \mathbb{N}$.

$P(n+1)$ est vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie (1.5 point)

4. $\binom{2n}{n} \times \binom{2p}{p} = \frac{(2n)!}{n!n!} \times \frac{(2p)!}{p!p!} = \frac{(2n)!(2p)!}{n!p!(n+p)!} \times \frac{(n+p)!}{n!p!}$

D'où $\binom{2n}{n} \times \binom{2p}{p} = K_n^p \times \binom{n+p}{n}$.

Comme K_n^p est un entier naturel, on en déduit que $\binom{n+p}{n}$ divise $\binom{2n}{n} \times \binom{2p}{p}$ (1 point)

EXERCICE 4 : TRIGONOMÉTRIE

Partie A : calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\cos(4t) = 2\cos^2(2t) - 1 = 2(2\cos^2(t) - 1)^2 - 1 = 8\cos^4(t) - 8\cos^2(t) + 1.$$

Ainsi, pour tout réel t , $\cos(4t) = 8\cos^4(t) - 8\cos^2(t) + 1$ 1.25 pt

2. On note $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

On applique la relation précédente au réel $t = \frac{\pi}{5}$: $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 8\alpha^4 - 8\alpha^2 + 1$.

Or $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Ce qui donne alors $-\alpha = 8\alpha^4 - 8\alpha^2 + 1$.

Ainsi, $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation (E) : $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$ 1 pt

3. $(2x^2 + x - 1)(ax^2 + bx + c) = 2ax^4 + (2b + a)x^3 + (2c + b - a)x^2 + (c - b)x - c$. 1 pt

En choisissant $a = 4$, $b = -2$ et $c = -1$, on obtient : $(2x^2 + x - 1)(4x^2 - 2x - 1) = 8x^4 - 8x^2 + x + 1$

4. Les racines du trinôme $2x^2 + x - 1$ sont -1 et $\frac{1}{2}$.

Le trinôme $4x^2 - 2x - 1$ a pour discriminant $\Delta = 20$, et admet deux racines : $x_1 = \frac{2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

On résout l'équation (E) par équivalences :

$$8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0 \iff (2x^2 + x - 1)(4x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$\iff 2x^2 + x - 1 = 0 \text{ ou } 4x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\iff x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ ou } x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

L'équation (E) admet ainsi quatre solutions.

Or $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de (E),

Et $\frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{3}$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (par stricte décroissance de la fonction $\cos$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$). **1.5 pt**

On en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ (la seule valeur solution de l'équation (E) strictement supérieure à $\frac{1}{2}$)

Partie B : majoration d'une somme

1. Méthode 1 : la fonction f est dérivable et $f'(x) = -2x + \lambda$.

$f'(x)$ s'annule donc pour $x = \frac{\lambda}{2}$, est négatif pour $x \in \left[\frac{\lambda}{2}, +\infty\right[$ et est positif pour $x \in]-\infty, \frac{\lambda}{2}]$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$\frac{\lambda}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

f présente un maximum en $\frac{\lambda}{2}$ et $f\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 2 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{2} = 2 + \frac{\lambda^2}{4}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 2 + \frac{\lambda^2}{4}$ **(1.5 pt)**

Méthode 2 : on montre que la différence $2 + \frac{\lambda^2}{4} - (2 - x^2 + \lambda x)$ est positive.

$$\begin{aligned} 2 + \frac{\lambda^2}{4} - (2 - x^2 + \lambda x) &= x^2 - \lambda x + \frac{\lambda^2}{4} \\ &= \left(x - \frac{\lambda}{2}\right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 2 + \frac{\lambda^2}{4}$

2. Méthode 1 :

On utilise les formules de linéarisation :

$$\sin^2(b) + \sin^2(c) = \frac{1 - \cos(2b)}{2} + \frac{1 - \cos(2c)}{2} = 1 - \frac{\cos(2b) + \cos(2c)}{2}$$

Or $\cos(2b) + \cos(2c) = 2 \cos(b+c) \cos(b-c)$ transformation d'une somme en produit

On en déduit que : $\sin^2(b) + \sin^2(c) = 1 - \cos(b+c) \cos(b-c)$ **(1.25 pt)**

Méthode 2 : utilisons les formules d'addition

$$\begin{aligned} 1 - \cos(b+c) \cos(b-c) &= 1 - (\cos(b) \cos(c) - \sin(b) \sin(c)) \times (\cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c)) \\ &= 1 - \cos^2(b) \cos^2(c) + \sin^2(b) \sin^2(c) \\ &= 1 - (1 - \sin^2(b)) \times (1 - \sin^2(c)) + \sin^2(b) \sin^2(c) \\ &= \sin^2(b) + \sin^2(c) \end{aligned}$$

3. En tenant compte du résultat précédent et de la relation fondamentale $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$, on obtient :

$$S = 2 - \cos^2(a) - \cos(b+c) \cos(b-c).$$

Or $a + b + c = \pi$, d'où $\cos(b+c) = \cos(\pi - a) = -\cos(a)$.

Par conséquent, $S = 2 - \cos^2(a) + \cos(b-c) \cos(a)$ **(0.75 pt)**

4. On utilise le résultat préliminaire (avec $\lambda = \cos(b-c)$ et $x = \cos(a)$).

On obtient :

$$S \leq 2 + \frac{\cos^2(b-c)}{4}$$

Comme $\cos(b-c) \in [-1, 1]$, alors $\cos^2(b-c) \leq 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } S \leq 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}} \quad (1 \text{ pt})$$

5. **Supposons** $S = \frac{9}{4}$.

D'après la question 3, $S \leq 2 + \frac{\cos^2(b-c)}{4}$.

On en déduit que $1 \leq \cos^2(b-c)$.

Comme de plus, $\cos^2(b-c) \leq 1$, alors $\cos^2(b-c) = 1$.

Donc $\cos(b-c) = 1$ ou $\cos(b-c) = -1$.

On sait également que $0 < b < \pi$ et $-\pi < -c < 0$, donc $b-c \in]-\pi, \pi[$.

Il est donc exclu que $\cos(b-c)$ soit égal à -1 .

Ainsi, $\cos(b-c) = 1$ et donc $b-c = 0$.

On a alors $S = \frac{9}{4}$ et $S = 2 - \cos^2(a) + \cos(a)$,

Ce qui donne : $\cos^2(a) - \cos(a) + \frac{1}{4} = 0$, ou encore $\left(\cos(a) - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$.

Par conséquent, $\cos(a) = \frac{1}{2}$, donc $a = \frac{\pi}{3}$ (car $a \in]0, \pi[$).

Comme $b = c$ et $\frac{\pi}{3} + b + c = \pi$, il vient : $b = c = \frac{\pi}{3}$.

$$\boxed{\text{On a ainsi prouvé que si } S = \frac{9}{4}, \text{ alors } a = b = c = \frac{\pi}{3}} \quad (2 \text{ pts})$$

EXERCICE 5 : QUESTIONS AUTOUR DU NOMBRE $\sqrt{2}$

1.

n	0	1	2	3	4	5
a_n	1	2	5	12	29	70
b_n	1	3	7	17	41	99

 (0.5 pt)

2. Soit $P(n) : 2a_n^2 - b_n^2 = (-1)^n$.

$P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} 2a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 &= 2(a_n + b_n)^2 - (2a_n + b_n)^2 \\ &= -(2a_n^2 - b_n^2) \\ &= -(-1)^n \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N} \quad 2a_n^2 - b_n^2 = (-1)^n} \quad (1.25 \text{ pt})$$

3. (a) Pour tout $n \geq 1$, $b_n - a_n = (2a_{n-1} + b_{n-1}) - (a_{n-1} + b_{n-1}) = a_{n-1} > 0$ (car $a_{n-1} \in \mathbb{N}^*$)

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n > a_n} \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$\text{On en déduit que } \frac{b_n}{a_n} > 1 \text{ et comme } \sqrt{2} \geq 1, \text{ on obtient } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{b_n}{a_n} + \sqrt{2} \geq 2} \quad (0.5 \text{ pt})$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question 2, $2a_n^2 - b_n^2 = (-1)^n$, d'où $2 - \frac{b_n^2}{a_n^2} = \frac{(-1)^n}{a_n^2}$

$$\text{puis } \left| 2 - \frac{b_n^2}{a_n^2} \right| = \frac{1}{a_n^2}.$$

$$\text{Ce qui donne : } \left| \sqrt{2} + \frac{b_n}{a_n} \right| \times \left| \sqrt{2} - \frac{b_n}{a_n} \right| = \frac{1}{a_n^2}$$

$$\text{On remarque que : } \left| \sqrt{2} - \frac{b_n}{a_n} \right| = \left| \frac{b_n}{a_n} - \sqrt{2} \right|$$

Et d'après la question précédente, $\left| \frac{b_n}{a_n} + \sqrt{2} \right| \geq 2$ d'où $\left| \frac{b_n}{a_n} + \sqrt{2} \right| \times \left| \frac{b_n}{a_n} - \sqrt{2} \right| \geq 2 \left| \frac{b_n}{a_n} - \sqrt{2} \right|$,
c'est-à-dire $\frac{1}{a_n^2} \geq 2 \left| \frac{b_n}{a_n} - \sqrt{2} \right|$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{2a_n^2} \geq \left| \frac{b_n}{a_n} - \sqrt{2} \right|} \quad (2 \text{ pts})$$

(c) Comme $2a_4^2 \geq 10^3$, $\frac{1}{2a_4^2} \leq 10^{-3}$: on en déduit que $\frac{41}{29}$ est une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près. (0.5 pt)

4. (a) $(1 + \sqrt{2})^1 = \sqrt{1} + \sqrt{2} = \sqrt{c_1} + \sqrt{1 + c_1}$ avec $c_1 = 1$.

$$(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} = \sqrt{9} + \sqrt{8} = \sqrt{c_2} + \sqrt{1 + c_2} \text{ avec } c_2 = 8.$$

$$\begin{aligned} \text{D'après la formule du binôme, } (1 + \sqrt{2})^3 &= 1 + 3 \times \sqrt{2} + 3 \times 2 + 2\sqrt{2} \\ &= 7 + 5\sqrt{2} \\ &= \sqrt{49} + \sqrt{50} \\ &= \sqrt{c_3} + \sqrt{1 + c_3} \text{ avec } c_3 = 49. \quad (1 \text{ pt}) \end{aligned}$$

(b) Soit $P(n) : (1 + \sqrt{2})^n = b_{n-1} + a_{n-1}\sqrt{2}$.

$P(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \text{Alors } (1 + \sqrt{2})^{n+1} &= (1 + \sqrt{2})^n \times (1 + \sqrt{2}) \\ &= (b_{n-1} + a_{n-1}\sqrt{2}) \times (1 + \sqrt{2}) \quad \text{d'après } P(n) \\ &= \underbrace{(b_{n-1} + 2a_{n-1})}_{=b_n} + \underbrace{(b_{n-1} + a_{n-1})}_{=a_n}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout entier } n \in \mathbb{N}^*, (1 + \sqrt{2})^n = b_{n-1} + a_{n-1}\sqrt{2}} \quad (1.25 \text{ pt})$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons n pair :

D'après la question 2, $2a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2 = -1$ ou encore $b_{n-1}^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$.

$$\begin{aligned} \text{Et d'après la question précédente, } (1 + \sqrt{2})^n &= \sqrt{b_{n-1}^2} + \sqrt{2a_{n-1}^2} \\ &= \sqrt{2a_{n-1}^2 + 1} + \sqrt{2a_{n-1}^2} \\ &= \sqrt{c_n} + \sqrt{1 + c_n} \text{ avec } c_n = 2a_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Supposons n impair :

D'après la question 2, $2a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2 = 1$ ou encore $2a_{n-1}^2 = b_{n-1}^2 + 1$.

$$\begin{aligned} \text{Et d'après la question précédente, } (1 + \sqrt{2})^n &= \sqrt{b_{n-1}^2} + \sqrt{2a_{n-1}^2} \\ &= \sqrt{b_{n-1}^2} + \sqrt{b_{n-1}^2 + 1} \\ &= \sqrt{c_n} + \sqrt{1 + c_n} \text{ avec } c_n = b_{n-1}^2. \end{aligned}$$

On a ainsi montré qu'à partir du rang 1, $(1 + \sqrt{2})^n$ peut s'écrire sous la forme $\sqrt{c_n} + \sqrt{c_n + 1}$ où $c_n \in \mathbb{N}$:
la propriété est démontrée pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. (2 pts)

Remarque : connaissant les premiers termes des suites a et b , on obtient ainsi les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^4 &= \sqrt{288} + \sqrt{289} & (1 + \sqrt{2})^5 &= \sqrt{1681} + \sqrt{1682} \\ (1 + \sqrt{2})^6 &= \sqrt{9801} + \sqrt{9802} & (1 + \sqrt{2})^7 &= \sqrt{57121} + \sqrt{57122} \end{aligned}$$

EXERCICE 6 : FORMULE DE VANDERMONDE

$$1. (a) \quad f_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - k) = (x - n) \times \prod_{k=0}^{n-1} (x - k)$$

$$\boxed{\text{D'où } f_{n+1}(x) = (x - n) \times f_n(x)} \quad 0.5 \text{ pt}$$

(b) $f_0(x+y) = 1$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f_k(x) f_{0-k}(y) = \binom{0}{0} f_0(x) f_0(y) = 1$

La relation $(\star)$ est vraie pour $n = 0$. 0.25 pt

(c) $f_{n+1}(x+y) = (x+y-n)f_n(x+y)$ d'après la question a

$$= (x+y-n) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k(x) f_{n-k}(y) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k(x) f_{n-k}(y) (x+y-n)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k(x) f_{n-k}(y) (x-k+y-n+k)$$

$$= \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} f_k(x) f_{n-k}(y) (x-k) + \binom{n}{k} f_k(x) f_{n-k}(y) (y-n+k) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k(x) f_{n-k}(y) (x-k) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k(x) f_{n-k}(y) (y-n+k) \quad \mathbf{1.5 \text{ pt}}$$

(d) On sait d'après la question a que $f_k(x)(x-k) = f_{k+1}(x)$ et $f_{n-k}(y)(y-n+k) = f_{n+1-k}(y)$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x+y) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{k+1}(x) f_{n-k}(y) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k(x) f_{n+1-k}(y) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f_k(x) f_{n+1-k}(y) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k(x) f_{n+1-k}(y) \\ &\quad \text{changement d'indice dans la première somme} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f_k(x) f_{n+1-k}(y) + \binom{n}{n} f_{n+1}(x) f_0(y) + \binom{n}{0} f_0(x) f_{n+1}(y) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f_k(x) f_{n+1-k}(y) + \binom{n+1}{n+1} f_{n+1}(x) f_0(y) + \binom{n+1}{0} f_0(x) f_{n+1}(y) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f_k(x) f_{n+1-k}(y) \end{aligned}$$

La relation $(\star)$ est ainsi prouvée au rang $n+1$. 2 pts

2. (a) $f_k(n) = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-k+1)$ produit d'entiers consécutifs

$$f_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!} = k! \times \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ainsi, $f_k(n) = k! \times \binom{n}{k}$

0.75 pt

(b) On a, d'après la question précédente : $f_n(2n) = n! \times \binom{2n}{n}$ (1)

D'autre part, $f_n(2n) = f_n(n+n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k(n) f_{n-k}(n)$ d'après la relation $(\star)$

Or $f_k(n) = k! \binom{n}{k}$ et $f_{n-k}(n) = (n-k)! \binom{n}{n-k} = (n-k)! \frac{n!}{(n-k)!k!}$

D'où $f_k(n) f_{n-k}(n) = n! \binom{n}{k}$

On obtient alors : $f_n(2n) = \sum_{k=0}^n n! \binom{n}{k}^2$ (2)

De (1) et (2), on déduit : $n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = n! \times \binom{2n}{n}$

Ainsi, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

2 pts