MPSI Le 19 septembre 2026

Mathématiques : devoir surveillé 1

durée : 3 heures

l'emploi d'une calculatrice est interdit

Si, au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 : calcul de sommes

Les trois questions sont totalement indépendantes.

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{n}{3} + 1$$

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

   Exprimer S_n en fonction de n.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{(2^k-1)(2^{k+1}-1)} = \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$.

3. **Somme d'inverse de coefficients binomiaux :**

   (a) Montrer, pour $2 \leq p \leq n$, $(p-1)\binom{n-1}{p-1}\binom{n}{p-1} = p\binom{n}{p}\binom{n-1}{p-2}$.

   (b) En déduire, pour $2 \leq p \leq n$, $\dfrac{1}{\binom{n}{p}} = \dfrac{p}{p-1}\left(\dfrac{1}{\binom{n-1}{p-1}} - \dfrac{1}{\binom{n}{p-1}}\right)$.

   (c) Soit p et q deux entiers tels que $2 \leq p \leq q$.

   Déterminer une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=p}^{q} \frac{1}{\binom{n}{p}}$.

Exercice 2 : trigonométrie

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

1. Démontrer que $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad\Big(\cos(2t) + \cos(4t)\Big)\sin(t) = \dfrac{\sin(5t) - \sin(t)}{2}$.

2. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$, puis que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

3. Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Partie B : majoration d'un produit

On considère trois réels x, y et z tels que :

$$0 < x < \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 < y < \pi\ ,\ 0 < z < \pi\ ,\ x + y + z = \pi$$

1. Montrer que $\forall t \in [0, \pi]$, $\quad\cos(t) - \cos^2(t) \leq \dfrac{1}{4}$, et étudier les cas d'égalité.

2. Établir la relation : $\cos(y)\cos(z) = \dfrac{\cos(y-z) - \cos(x)}{2}$.

3. En déduire : $\cos(x)\cos(y)\cos(z) \leq \dfrac{\cos(x) - \cos^2(x)}{2}$, puis $\cos(x)\cos(y)\cos(z) \leq \dfrac{1}{8}$.

4. Démontrer que si $\cos(x)\cos(y)\cos(z) = \dfrac{1}{8}$, alors $x = y = z = \dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 3 : suite de Sylvester

On appelle *suite de Sylvester* la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$s_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^{n} s_k$$

1. Calculer s_1, s_2 et s_3.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $s_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1$.
   En déduire que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $s_n \geq n + 2$.
4. Prouver que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{s_n - 1} - \dfrac{1}{s_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{s_n}$.
5. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k}$ puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k}$.

Exercice 4 : radicaux

1. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$. Démontrer que si $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, alors $a = c$ et $b = d$.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Démontrer que si $\sqrt{54 + 20\sqrt{2}} = x + y\sqrt{2}$, alors $x = 2$ et $y = 5$.
   La réciproque est-elle vraie ?
3. Démontrer qu'il n'existe pas de couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\sqrt{100 + 46\sqrt{2}} = x + y\sqrt{2}$. *On pourra raisonner par l'absurde.*

Exercice 5 : formule d'inversion de Pascal

Dans cet exercice, on considère deux suites de nombres réels $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ liées par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

1. Calculer b_n dans les cas suivants :
   a) $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = 1$.
   b) $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = 2^k$.
2. Soient p, k, n trois entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$.
   a) Démontrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$.
   b) En déduire que si $p < n$, alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p} = 0$.
3. Démontrer la formule d'inversion de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} b_k = a_n$$

On pourra commencer par écrire dans la somme du membre de gauche $b_k = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} a_p$ *et intervertir les deux sommes obtenues.*

Exercice 6 : une formule remarquable

Montrer que pour tout $(p, q, n) \in \mathbb{N}^3$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{p}\binom{k}{q} = \binom{n+1}{p+q+1}$.

Indication : on montrera par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{p}\binom{k}{q} = \binom{n+1}{p+q+1} \text{ »}$$