
EXERCICE 1 : NOMBRES COMPLEXES (6.5 PTS)

1. Comme $|\overline{a_p}| = |a_p|$, on a : $|Z_p| = \frac{|a_p|}{|\overline{a_p}|} = 1$ **(0.5 pt)**
2. Les racines 6^{ièmes} de 1 sont les nombres complexes $e^{ki\pi/3}$ avec $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$ **(0.5 pt)**

$$Z_3 = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{2e^{i\pi/6}}{2e^{-i\pi/6}} = e^{i\pi/3} : \text{ } Z_3 \text{ est donc une racine 6^{ième} de 1} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

3. (a) D'après la formule du binôme : $(2 - i + 2i)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2 - i)^k (2i)^{n-k}$,

Ce qui donne : $(2 + i)^n = S + (2i)^n + (2 - i)^n$.

Ainsi, $S = (2 + i)^n - (2 - i)^n - (2i)^n$.

Or par hypothèse, $(Z_4)^n = 1$, donc $(2 + i)^n = (2 - i)^n$.

Ainsi, $S = -(2i)^n$ **(1.25 pt)**

(b) On a : $S = (2 - i) \times \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2 - i)^{k-1} (2i)^{n-k}$

$$= (2 - i) \times \sum_{k=1}^{n-1} z_k \text{ avec } z_k = \binom{n}{k} (2 - i)^{k-1} (2i)^{n-k}$$

Or, d'après la formule du binôme, $z_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{k} \binom{k-1}{j} 2^j (-i)^{k-1-j} (2i)^{n-k}$

Les coefficients binomiaux étant des entiers naturels, les termes de cette somme sont soit des entiers soit des multiples entiers de i .

Par conséquent, l'écriture algébrique de z_k est de la forme $a_k + ib_k$ avec $a_k \in \mathbb{Z}$ et $b_k \in \mathbb{Z}$.

En posant $A = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ et $B = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$, on a alors : $S = (2 - i) \times (A + Bi)$ avec $(A, B) \in \mathbb{Z}^2$ **(2 pts)**

- (c) D'une part, $S = -(2i)^n$ et $|2i| = 2$, donc $|S|^2 = 2^{2n}$.
 D'autre part, $|S|^2 = |2 - i|^2 \times |A + iB|^2 = 5(A^2 + B^2)$ est un multiple de 5 (car $A^2 + B^2 \in \mathbb{N}$).
 Ce qui est contradictoire avec $|S|^2 = 2^{2n}$ qui n'est pas divisible par 5.

Ainsi, $Z_4 = \frac{2+i}{2-i}$ n'est, pour aucun entier n supérieur ou égal à 2, une racine $n^{\text{ième}}$ de 1 **(1.75 pt)**

EXERCICE 2 : CALCUL DE SOMMES (9 PTS)

1. • On suppose que $p = 0$:

alors $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$

- On suppose que $p = n$:

alors $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kn} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^n)^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$

- On suppose que $0 < p < n$:

Dans ce cas, $\omega^p \neq 1$. On a donc : $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k = \frac{1 - (\omega^p)^n}{1 - \omega^p} = \frac{1 - \omega^{pn}}{1 - \omega^p}$

Comme $\omega^{pn} = (\omega^n)^p = 1$, on obtient alors $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = 0$

La somme $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ vaut n si $p = 0$ ou $p = n$, et est nulle sinon.

Comme $\omega^{kp} = e^{\frac{2ipk\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2kp\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2kp\pi}{n}\right)$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2kp\pi}{n}\right) + i \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2kp\pi}{n}\right)$$

Par conséquent, $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2kp\pi}{n}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}\right)$

Cette somme est donc égale à n si $p = 0$ ou $p = n$, et est nulle sinon **(3 pts)**

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \omega^k - 1 &= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - 1 + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \text{ donc } |\omega^k - 1|^2 = \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - 1\right)^2 + \sin^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= 1 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \underbrace{\cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}_{=1} \\ &= 2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\omega^k - 1|^2 = 2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ **(1.25 pt)**

Autre calcul possible :

$$|\omega^k - 1|^2 = (\omega^k - 1)(\overline{\omega^k} - 1) = |\omega^k|^2 - \underbrace{(\omega^k + \overline{\omega^k})}_{=2\operatorname{Re}(\omega^k)} + 1 = 2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

(b) On a, compte tenu du résultat de la question précédente :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 2 - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 2n - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$ d'après le résultat de la question 1 avec $p = 1$

Ainsi, on obtient : $\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|^2 = 2n$ **(1 pt)**

3. (a) Pour simplifier cette somme, on utilise la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (z + \omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} z^{n-p} \omega^{kp} = \sum_{p=0}^n \left(\binom{n}{p} z^{n-p} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} \right)$$

Or, d'après la question 1, la somme intérieure est nulle sauf pour $p = 0$ et pour $p = n$, auxquels cas, elle vaut n . Par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1} (z + \omega^k)^n = \binom{n}{0} n z^n + \binom{n}{n} n z^0 = n(z^n + 1)$$

Ainsi, pour tout nombre complexe z , on a : $\sum_{k=0}^{n-1} (z + \omega^k)^n = n(z^n + 1)$ **(1.75 pt)**

(b) On applique le résultat précédent à $z = e^{i\pi/n}$. On obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\pi/n} + e^{2ki\pi/n})^n = n(e^{i\pi} + 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{On utilise l'exponentielle d'angle moitié : } e^{i\pi/n} + e^{2ki\pi/n} &= e^{i(2k+1)\pi/2n} \left(e^{-i(2k-1)\pi/2n} + e^{i(2k-1)\pi/2n} \right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) e^{i(2k+1)\pi/2n} \end{aligned}$$

$$\text{On obtient alors } 2^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \right)^n e^{i(2k+1)\pi/2} = 0$$

On note ensuite que $e^{i(2k+1)\pi/2} = e^{ik\pi} e^{i\pi/2} = (-1)^k i$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \right)^n = 0$ **(2 pts)**

EXERCICE 3 : RÉOLUTION D'ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES (6.5 PTS)

1. On cherche une racine carrée δ de $-9 + 12i$ sous la forme $\delta = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Le module de $-9 + 12i$ est égal à 10.

$$\begin{aligned}\delta^2 = -9 + 12i &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -9 & (1) \\ 2xy = 12 & (2) \\ x^2 + y^2 = 15 & (3) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x^2 = 6 & (1') = (1) + (3) \\ 2xy = 12 & (2) \\ 2y^2 = 6 & (3') = (3) - (1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -2\sqrt{3} \end{cases}\end{aligned}$$

Les deux racines carrées de $-9 + 12i$ sont les nombres $\sqrt{3}(1 + 2i)$ et $-\sqrt{3}(1 + 2i)$ **(1.5 pt)**

2. On note que $t^3 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + 3z + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^3}$, donc $t^3 - 3t = z^3 + \frac{1}{z^3}$.

On procède par équivalences : $t^3 - 3t - 52 = 0 \iff z^3 + \frac{1}{z^3} - 52 = 0$

$$\iff \frac{z^6 + 1 - 52z^3}{z^3} = 0$$
$$\iff z^6 - 52z^3 + 1 = 0$$

Ainsi, $z^6 - 52z^3 + 1 = 0 \iff t^3 - 3t - 52 = 0$ **(1 pt)**

3. L'expression polynomiale $t^3 - 3t - 52$ s'annule pour $t = 4$.

On peut factoriser par $t - 4$, et on obtient : $t^3 - 3t - 52 = (t - 4)(t^2 + 4t + 13)$.

On a alors : $t^3 - 3t - 52 = 0 \iff t - 4 = 0$ ou $t^2 + 4t + 13 = 0$.

Or le discriminant de $t^2 + 4t + 13$ vaut -36 .

L'équation (E') a donc trois solutions : 4, $-2 - 3i$ et $-2 + 3i$ **(1.5 pt)**

4. On note que $z = 0$ n'est pas solution de l'équation (E) .

Supposons désormais $z \in \mathbb{C}^*$.

On a d'après les questions 2 et 3 : $z^6 - 52z^3 + 1 = 0 \iff z + \frac{1}{z} = 4$ ou $z + \frac{1}{z} = -2 - 3i$ ou $z + \frac{1}{z} = -2 + 3i$

Or l'équation $z + \frac{1}{z} = 4$ est équivalente à $z^2 - 4z + 1 = 0$.

Elle a deux solutions : $z_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $z_2 = 2 + \sqrt{3}$.

L'équation $z + \frac{1}{z} = -2 - 3i$ est équivalente à $z^2 + (2 + 3i)z + 1 = 0$.

Le discriminant vaut : $\Delta = (2 + 3i)^2 - 4 = -9 + 12i$.

D'après la question préliminaire, $\delta = \sqrt{3}(1 + 2i)$ est une racine carrée de Δ .

Cette équation a donc deux solutions : $z_3 = \frac{-2 - \sqrt{3} - i(3 + 2\sqrt{3})}{2}$ et $z_4 = \frac{-2 + \sqrt{3} + i(2\sqrt{3} - 3)}{2}$

De même, l'équation $z + \frac{1}{z} = -2 + 3i$ est équivalente à $z^2 + (2 - 3i)z + 1 = 0$.

Le discriminant vaut : $\Delta = (2 - 3i)^2 - 4 = -9 - 12i$.

$\delta = \sqrt{3}(1 - 2i)$ est une racine carrée de Δ .

Cette équation a donc deux solutions : $z_5 = \frac{-2 - \sqrt{3} + i(3 + 2\sqrt{3})}{2}$ et $z_6 = \frac{-2 + \sqrt{3} + i(3 - 2\sqrt{3})}{2}$

L'ensemble S des solutions de (E) est donc : $S = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$ **(2.5 pts)**

EXERCICE 4 : ÉTUDE D'UNE FONCTION ET D'UNE SUITE (13 PTS)

1. (a) On résout l'équation par équivalences :

$$\begin{aligned}
 f(z) = 0 &\iff z + \frac{1}{z} = 0 \\
 &\iff \frac{z^2 + 1}{z} = 0 \\
 &\iff z^2 = -1 \\
 &\iff z = i \text{ ou } z = -i
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $f(z) = 0$ possède deux solutions : i et $-i$

Comme $f(i) = f(-i)$, l'application f n'est pas injective. **(1.25 pt)**

- (b) Soit $y \in \mathbb{C}$.

L'équation du second degré $Z^2 - 2yZ + 1 = 0$ d'inconnue Z admet au moins une solution dans l'ensemble $\mathbb{C}$: il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 - 2yz + 1 = 0$ (z est défini implicitement).

Nécessairement, $z \neq 0$, vu que 0 n'est pas solution de cette équation.

On a alors : $z^2 + 1 = 2yz$, puis $z + \frac{1}{z} = 2y$ et enfin $f(z) = y$.

L'élément y admet donc bien un antécédent dans l'ensemble $\mathbb{C}^*$.

f est surjective **(1.5 pt)**

- (c) Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(x + iy + \frac{1}{x + iy} \right) = \frac{1}{2} \left(x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{i}{2} \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

Par conséquent, $\text{Re}(f(z)) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$

On en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 f(z) \text{ est un imaginaire pur} &\iff \text{Re}(f(z)) = 0 \\
 &\iff x + \frac{x}{x^2 + y^2} = 0 \\
 &\iff x \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{car } 1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \neq 0
 \end{aligned}$$

On a ainsi montré que : $f(z)$ est un imaginaire pur $\iff z$ est un imaginaire pur **(1.75 pt)**

2. (a) Soit $P(n)$: " z_n est bien défini et n'est pas un imaginaire pur".

$P(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie.

z_n n'est pas un imaginaire pur, donc en particulier $z_n \neq 0$.

Par conséquent, $z_{n+1} = f(z_n)$ est bien défini.

z_n n'est pas un imaginaire pur, donc d'après l'équivalence établie à la question 1b, $z_{n+1} = f(z_n)$ n'est pas un imaginaire pur.

$P(n+1)$ est vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n est bien défini et $z_n \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ **(1 pt)**

- (b) On repère deux éléments essentiels dans la question qui est posée ici : la présence d'un quantificateur universel et le connecteur $\implies$. La preuve va commencer par fixer un entier n quelconque et la formulation d'une hypothèse de départ, qui dépend du mode de raisonnement choisi : raisonnement direct, raisonnement par contraposition ou raisonnement par l'absurde.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $z_{n+1} = -1$.

Alors $\frac{z_n^2 + 1}{2z_n} = -1$, donc $z_n^2 + 1 = -2z_n$,

ou encore $z_n^2 + 2z_n + 1 = 0$, ce qui donne $(z_n + 1)^2 = 0$.

Par conséquent, $z_n = -1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $z_n \neq -1$, alors $z_{n+1} \neq -1$ **(1.25 pt)**

- (c) *Remarque : comme $z_0 \neq -1$, on déduit par le principe de récurrence et le résultat de la question précédente que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \neq -1$, ce qui justifie que les nombres u_n sont bien définis.*

$$u_{n+1} = \frac{z_{n+1} - 1}{z_{n+1} + 1} = \frac{\frac{z_n^2 + 1}{2z_n} - 1}{\frac{z_n^2 + 1}{2z_n} + 1} = \frac{z_n^2 + 1 - 2z_n}{z_n^2 + 1 + 2z_n} = \left(\frac{z_n - 1}{z_n + 1} \right)^2$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$ **(1 pt)**

- (d) On constate que $u_0 = \lambda$, $u_1 = u_0^2 = \lambda^2$, $u_2 = u_1^2 = \lambda^4$ et $u_3 = u_2^2 = \lambda^8$.

On propose de démontrer par récurrence que $u_n = \lambda^{2^n}$.

Ce résultat est vérifié pour $n = 0$.

Supposons le résultat acquis à un rang $n \geq 0$.

Alors : $u_{n+1} = u_n^2 = (\lambda^{2^n})^2 = \lambda^{2^n \times 2} = \lambda^{2^{n+1}}$.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda^{2^n}$ **(1 pt)**

On a : $u_n = \frac{z_n - 1}{z_n + 1}$.

Comme $(z_n - 1) \neq (z_n + 1)$, alors $u_n \neq 1$.

On a également : $u_n(z_n + 1) = z_n - 1$,

Ce qui donne : $u_n z_n - z_n = -(1 + u_n)$, ou encore : $z_n(1 - u_n) = 1 + u_n$.

On obtient alors $z_n = \frac{1 + u_n}{1 - u_n}$ (opération possible car $1 - u_n \neq 0$)

Ainsi, pour tout entier n , $z_n = \frac{1 + \lambda^{2^n}}{1 - \lambda^{2^n}}$ **(1.25 pt)**

- (e) On note $x_0 = \text{Re}(u_0)$ et $y_0 = \text{Im}(u_0)$.

$$\lambda = \frac{x_0 - 1 + iy_0}{x_0 + 1 + iy_0}, \text{ donc } |\lambda| = \frac{|x_0 - 1 + iy_0|}{|x_0 + 1 + iy_0|} = \frac{\sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2}}{\sqrt{(x_0 + 1)^2 + y_0^2}} = \sqrt{\frac{x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2}{x_0^2 + 2x_0 + 1 + y_0^2}}$$

Comme $x_0 > 0$, on en déduit que $x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 < x_0^2 + 2x_0 + 1 + y_0^2$, par conséquent, $\frac{x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2}{x_0^2 + 2x_0 + 1 + y_0^2} < 1$

donc $|\lambda| < 1$ **(1.25 pt)**

$$z_n - 1 = \frac{2\lambda^{2^n}}{1 - \lambda^{2^n}}, \text{ donc } |z_n - 1| = \frac{2|\lambda|^{2^n}}{|1 - \lambda^{2^n}|}$$

Or d'après l'inégalité triangulaire, $|1 - \lambda^{2^n}| \geq 1 - |\lambda|^{2^n}$, donc $\frac{1}{|1 - \lambda^{2^n}|} \leq \frac{1}{1 - |\lambda|^{2^n}}$

$$\text{D'où } |z_n - 1| \leq \frac{2|\lambda|^{2^n}}{1 - |\lambda|^{2^n}} = \frac{2|\lambda|^{2^n}}{1 - |\lambda|^{2^n}}$$

Comme $|\lambda| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda|^{2^n} = 0$.

On obtient alors, par les règles opératoires sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2|\lambda|^{2^n}}{1 - |\lambda|^{2^n}} = 0$.

$0 \leq |z_n - 1| \leq \frac{2|\lambda|^{2^n}}{1 - |\lambda|^{2^n}}$: $|z_n - 1|$ est encadré par deux termes de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$,

par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - 1| = 0$ **(1.75 pt)**

EXERCICE 5 : LA MÉTHODE DE CARDAN

1. (a) L'équation $X^2 - zX - \frac{p}{3} = 0$ est une équation du second degré, **donc elle admet deux solutions complexes u et v** (éventuellement confondues).

Les liens entre racines et coefficients d'une équation du second degré nous disent alors que $u + v = z$ et $uv = -\frac{p}{3}$.

(b) On a : $u^3v^3 = (uv)^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$, donc $\boxed{u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}}$

Ensuite : $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$,

Donc $u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = z^3 + pz$.

Comme z est solution de (E) , on a $z^3 + pz = -q$.

$\boxed{\text{Ainsi, } u^3 + v^3 = -q}$

- (c) D'après le cours, u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation $X^2 - (u^3 + v^3)X + u^3v^3 = 0$, c'est-à-dire de l'équation (E') .

- (d) On utilise le fait que $u^3 + v^3 = -q$, $uv = -\frac{p}{3}$, $j^3 = 1$, $j^4 = j$ et $j^5 = j^2$.

$$\begin{aligned}(ju + j^2v)^3 + p(ju + j^2v) + q &= u^3 + 3ju^2v + 3j^2uv^2 + v^3 + p(ju + j^2v) + q \\ &= 3uv(ju + j^2v) + p(ju + j^2v) \quad \text{car } u^3 + v^3 = -q \\ &= 0 \quad \text{car } 3uv = -p\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } ju + j^2v \text{ est une solution de l'équation } (E)}$

$$\begin{aligned}(j^2u + jv)^3 + p(j^2u + jv) + q &= u^3 + 3j^2u^2v + 3juv^2 + v^3 + p(j^2u + jv) + q \\ &= 3uv(j^2u + jv) + p(j^2u + jv) \quad \text{car } u^3 + v^3 = -q \\ &= 0 \quad \text{car } 3uv = -p\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } j^2u + jv \text{ est une solution de l'équation } (E)}$

2. Avec les notations de l'énoncé, $p = 6$ et $q = -2$. L'équation (E') est alors $X^2 - 2X - 8 = 0$

Le discriminant de (E') vaut : $\Delta = 36$.

L'équation (E') a donc deux racines réelles : 4 et -2.

$u = \sqrt[3]{4}$ et $v = -\sqrt[3]{2}$ sont respectivement des racines cubiques de 4 et -2 et vérifient : $uv = -\sqrt[3]{8} = -2 = -\frac{p}{3}$.

$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont alors les nombres : } \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}, j\sqrt[3]{4} - j^2\sqrt[3]{2} \text{ et } j^2\sqrt[3]{4} - j\sqrt[3]{2}}$
