Transformée de Laplace

Q 1. Rappeler la définition de la transformée de Laplace X(p) d'une fonction du temps x(t).

$$\boxed{X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}dt}$$

Q 2. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $x(t) = (1+t).e^{-2t+1}$

On développe avec $e^{-2t+1} = e^1.e^{-2t}$

$x(t) = (1+t).e^{-2t+1} = e^1.e^{-2t}+e^1.t.e^{-2t}$

Par linéarité de la TL et utilisation du tableau on obtient alors :

$$X(p) = e.\frac{1}{p+2} + e.\frac{1}{(p+2)^2} = e.\frac{p+3}{(p+2)^2}$$

Q 3. **Déterminer la fonction du temps dont la transformée de Laplace est :**

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+6p+9}$$

On factorise le dénominateur :

$$Y(p) = \frac{1}{(p+3)^2}$$

Par utilisation du tableau on obtient directement par identification :

$y(t) = t.e^{-3t}$

Pilotage d'un véhicule électrique

Q 1.

On recense :

- Résistance au roulement : $f_r(t)$
- Résistance de l'aire : $f_a(t)$
- Traction sur les roues avant : $2.f_{roue}(t)$

Ainsi par l'application du PFD au véhicule en translation : $\sum forces = M_v.a$

Soit : $M_v\frac{dv(t)}{dt} = 2\,f_{roue}(t) - f_r(t) - f_a(t)$

Q 2.

Transformons l'équation différentielle de la question précédente avec $f_r(t) + f_a(t) = f_f(t) = K_f.v(t)$:

$$M_v \frac{dv(t)}{dt} = 2\,f_{roue}(t) - K_f.v(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad M_v pV(p) = 2F_{roue}(p) - K_f V(p)$$

Soit :

$$\boxed{H_{dyn}(p) = \frac{V(p)}{F_{roue}(p)} = \frac{2}{M_V p + K_f}}$$

Conduite classique

Q 3.

Capteur :	pédale (capteur à effet Hall)
Moduler :	interface de pilotage
Convertir :	moteur électrique
Transmettre :	réducteur + différentiel
Agir :	roues

Q 4.

$$H_{mc}(p) = \frac{V(p)}{A_p(p)} = K_p K_m K_{red} \frac{1}{2} \frac{1}{R_{roue}} \frac{2}{K_f + M_v\,p}$$

Q 5.

La consigne sur l'accélérateur est un échelon : $a_p(t) = 0{,}28.u(t)$ d'où $A_p(p) = \frac{0{,}28}{p}$

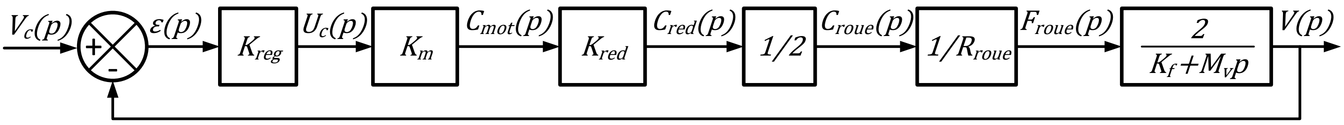
Ainsi : $V(p) = \frac{0{,}28}{p}\frac{4280}{32+1940p}$.

En utilisant le théorème de la valeur finale, on écrit :

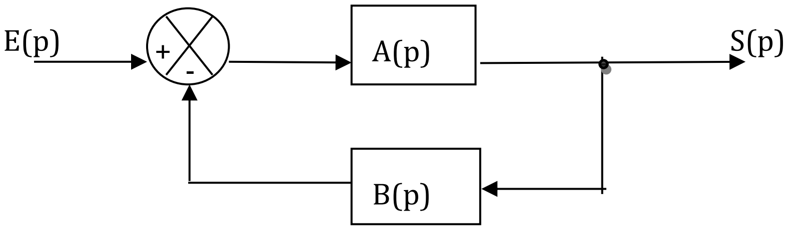
$v_{\mathrm{lim}} = \lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{p\to0} pV(p) = \lim_{p\to0} 0{,}28\frac{4280}{32+1940p} = 37{,}4\,m/s \implies \boxed{v_{lim} = 134{,}8\,km/h}$

De même pour $a_p(t) = u(t)$, $\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{p\to0} \frac{4280}{32+1940p} = 133{,}7\,m/s \implies \boxed{v_{lim} = 481{,}3\,km/h}$

Q 6.



Les fonctions de transfert en série se multiplient. Donc on obtient la forme de schéma bloc du cours suivant avec $A(p) = H_{mc}(p) = \frac{V(p)}{A_p(p)} = K_p K_m K_{red} \frac{1}{2} \frac{1}{R_{roue}} \frac{2}{K_f + M_v\, p} = \frac{4280}{32+1940p}$ et $B(p) = 1$



La formule du cours étant $FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$

On a alors :

$$H_{mr}(p) = \frac{V(p)}{V_c(p)} = \frac{K_{reg} K_m K_{red} \frac{1}{2} \frac{1}{R_{roue}} \frac{2}{K_f + M_v\, p}}{1 + K_{reg} K_m K_{red} \frac{1}{2} \frac{1}{R_{roue}} \frac{2}{K_f + M_v p}} \Longrightarrow \boxed{H_{mr}(p) = \frac{K_{reg} K_m K_{red}}{K_{reg} K_m K_{red} + R_{roue}(K_f + M_v\, p)}}$$

Q 7.

Pour mettre $H_{mr}(p)$ sous forme canonique il faut diviser numérateur et dénominateur par :

$32 + 856\, K_{reg}$

on obtient ainsi :

$H_{mr}(p) = \frac{\frac{856\, K_{reg}}{32+856\, K_{reg}}}{1+\frac{1940}{32+856\, K_{reg}} p} = \frac{K}{1+Tp}$ $avec\ K = \frac{856\, K_{reg}}{32+856\, K_{reg}}$ $et\ T = \frac{1940}{32+856\, K_{reg}}$ forme canonique du premier ordre.

Q 8.

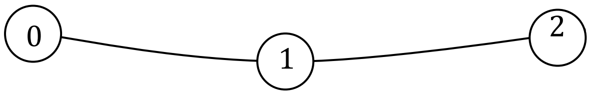
On prévoit ainsi les valeurs finales des réponses à un échelon de consigne de 17m/s :

$v_\infty = 17.K = 17 \frac{856\, K_{reg}}{32+856\, K_{reg}} = 15{,}8 \frac{m}{s}$ L'asservissement n'est pas parfaitement précis ainsi réglé.

La rapidité et l'amortissement sont des critères plus importants pour un tel asservissement

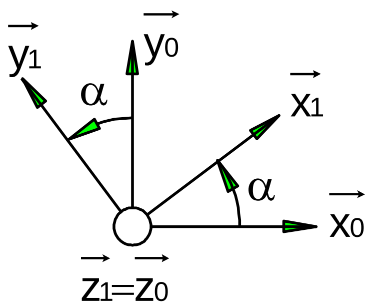
Manège à sensations

Q 1. Réaliser un graphe des liaisons. Préciser le paramètre de mouvement associé à chaque liaison.

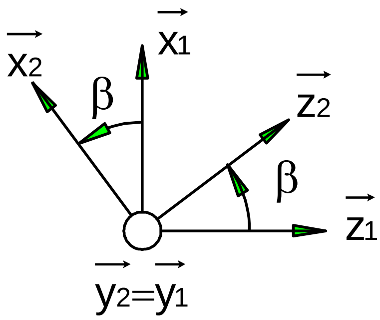


Liaison	Nom de la liaison	Paramètre
L_{01}	Pivot d'axe $(O,\vec{z}_1)$	α
L_{12}	Pivot d'axe $(A,\vec{y}_1)$	β

Q 2. Réaliser les figures de calcul de changement de base correspondant. En déduire les vecteurs instantanés de rotation sous chaque figure.



$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\alpha}\ \vec{z}_1$



$\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\beta}\ \vec{y}_1$

Q 3.

$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_0 = -\sin\alpha \vec{z}_0$

$\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_0 = \vec{x}_1 \wedge \vec{z}_1 = -\vec{y}_1$

$\vec{x}_2 \wedge \vec{z}_0 = \vec{x}_2 \wedge \vec{z}_1 = -\cos\beta \vec{y}_1$

$\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_2 = \vec{y}_0 \wedge \left(\cos\beta \vec{z}_1 + \sin\beta \vec{x}_1\right) = \cos\beta \vec{x}_0 - \sin\alpha\cos\beta \vec{z}_0$

Q 4. Déterminer $\vec{V}(A/0)$ puis $\vec{V}(G/0)$ vérifier l'homogénéité des résultats. Déterminer la valeur maximale de la norme de $\vec{V}(A/0)$ pour une valeur de $\dot{\alpha} = 3rad/s$.

Par définition le vecteur vitesse est le vecteur dérivé du vecteur position : $\vec{V}(A/0) = \dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt_{/0}} = a.\dfrac{d\vec{x}_1}{dt_{/0}} = a.\vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 = a.\dot{\alpha}.\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = a.\dot{\alpha}.\vec{y}_1$

$\boxed{\vec{V}(A/0) = a.\dot{\alpha}.\vec{y}_1}$

$\vec{V}(G/0) = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt_{/0}} = \dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt_{/0}} + \dfrac{d\overrightarrow{AG}}{dt_{/0}} = a.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + b.\dfrac{d\vec{x}_2}{dt_{/0}}$

$.\dfrac{d\vec{x}_2}{dt_{/0}} = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{x}_2 = \dot{\beta}.\vec{y}_2 \wedge \vec{x}_2 + \dot{\alpha}.\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2 = -\dot{\beta}.\vec{z}_2 + \dot{\alpha}.\cos\beta \vec{y}_1$ et ainsi :

$\boxed{\vec{V}(G/0) = \left(a + b\cos\beta\right)\dot{\alpha}\vec{y}_1 - b\dot{\beta}\vec{z}_2}$

$\boxed{\left\|\vec{V}(A/0)\right\| = a.\dot{\alpha} = 3.3 = 9m.s^{-1} = 32,4km/h}$

Q 5. Déterminer la condition sur les paramètres de mouvement et leurs dérivées temporelles qui permet d'assurer en permanence l'exigence 1 du cahier des charges. Et si $\dot{\alpha} = 3 rad/s$, quelle devra être la valeur maxi de $\dot{\beta}$ dans la position particulière $\beta = 0$.

Il faut alors vérifier $\left\| \vec{V}(G, 2/0) \right\| < V_{\max}$

Soit $\left\| (a + b\cos\beta)\dot{\alpha}\vec{y}_1 + b\dot{\beta}\vec{z}_2 \right\| < V_{\max}$

Et donc à tout instant :

$$\sqrt{(a + b\cos\beta)^2 \dot{\alpha}_1^2 + b^2\dot{\beta}^2} < V_{\max}$$

Si $\dot{\alpha} = 3 rad/s$ **et** $\beta = 0$ **on a alors :**

$\sqrt{4^2.3^2 + 1^2\dot{\beta}^2} < V_{\max}$ **et ainsi** $\left|\dot{\beta}\right| < \sqrt{V_{\max}{}^2 - 144}$

Q 6. Déterminer l'expression $\vec{a}(G/0)$. On la mettra sous la forme :

$\vec{a}(G/0) = c_1.\ddot{\alpha} + c_2.\dot{\alpha}^2 + c_3.\ddot{\beta} + c_4.\dot{\beta}^2 + c_5.\dot{\alpha}.\dot{\beta}$ avec c_i des coefficients à déterminer

Par définition $\vec{a}(G/0) = \dfrac{d\vec{V}(G/0)}{dt_{/0}} = \dfrac{d\left((a + b\cos\beta)\dot{\alpha}\vec{y}_1 - b\dot{\beta}\vec{z}_2\right)}{dt_{/0}}$

$$.\frac{d\vec{z}_2}{dt_{/0}} = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{z}_2 = \dot{\beta}.\vec{y}_2 \wedge \vec{z}_2 + \dot{\alpha}.\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2 = \dot{\beta}.\vec{x}_2 + \dot{\alpha}.\sin\beta\vec{y}_1$$

$$.\frac{d\vec{y}_1}{dt_{/0}} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{y}_1 = \dot{\alpha}.\vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\alpha}.\vec{x}_1$$

Ainsi

$$\vec{a}(G/0) = (a + b\cos\beta)\ddot{\alpha}\vec{y}_1 - (a + b\cos\beta)\dot{\alpha}^2\vec{x}_1 - b\ddot{\beta}\vec{z}_2 - b\dot{\beta}^2\vec{z}_2 - 2b\sin\beta\dot{\alpha}\dot{\beta}\vec{y}_1$$

Q 7. Déterminer la condition sur la valeur de la vitesse angulaire (en tour par minute) du bras 1 par rapport au sol 0 qui permet d'assurer en permanence l'exigence 2 du cahier des charges.

Dans ce cas particulier $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ ***et*** $\dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{dt} = \text{cte donc :}$

$$\vec{a}(G/0) = \frac{d\vec{V}(G/0)}{dt_{/0}} = -a\dot{\alpha}^2\vec{x}_1$$

on doit alors vérifier l'exigence 2 telle que :

$a\dot{\alpha}^2 < 3g$ **soit** $\dot{\alpha} < \sqrt{\dfrac{3g}{a}}$ **et donc** $\dot{\alpha} < 3{,}312 rad/s$