

Transformée de Laplace

Q 1. Rappeler la définition de la transformée de Laplace $X(p)$ d'une fonction du temps $x(t)$.

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt$$

Q 2. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $x(t) = (1 + t).e^{-2t+1}$

On développe avec $e^{-2t+1} = e^1 \cdot e^{-2t}$

$$x(t) = (1 + t).e^{-2t+1} = e^1 \cdot e^{-2t} + e^1 \cdot t \cdot e^{-2t}$$

Par linéarité de la TL et utilisation du tableau on obtient alors :

$$X(p) = e \cdot \frac{1}{p+2} + e \cdot \frac{1}{(p+2)^2} = e \cdot \frac{p+3}{(p+2)^2}$$

Q 3. Déterminer la fonction du temps dont la transformée de Laplace est :

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + 6p + 9}$$

On factorise le dénominateur :

$$Y(p) = \frac{1}{(p+3)^2}$$

Par utilisation du tableau on obtient directement par identification :

$$y(t) = t \cdot e^{-3t}$$

Pilotage d'un véhicule électrique

Q 1.

On recense :

- Résistance au roulement : $f_r(t)$
- Résistance de l'aire : $f_a(t)$
- Traction sur les roues avant : $2 \cdot f_{roue}(t)$



Ainsi par l'application du PFD au véhicule en translation : $\sum forces = M_v \cdot a$

$$\text{Soit : } M_v \frac{dv(t)}{dt} = 2 f_{roue}(t) - f_r(t) - f_a(t)$$

Q 2.

Transformons l'équation différentielle de la question précédente avec $f_r(t) + f_a(t) = f_f(t) = K_f \cdot v(t)$:

$$M_v \frac{dv(t)}{dt} = 2 f_{roue}(t) - K_f \cdot v(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} M_v pV(p) = 2F_{roue}(p) - K_f V(p)$$

Soit :

$$H_{dyn}(p) = \frac{V(p)}{F_{roue}(p)} = \frac{2}{M_v p + K_f}$$

Conduite classique**Q 3.**

Capteur : pédale (capteur à effet Hall)

Moduler : interface de pilotage

Convertir : moteur électrique

Transmettre : réducteur + différentiel

Agir : roues

Q 4.

$$H_{mc}(p) = \frac{V(p)}{A_p(p)} = K_p K_m K_{red} \frac{1}{2} \frac{1}{R_{roue}} \frac{2}{K_f + M_v p}$$

Q 5.

La consigne sur l'accélérateur est un échelon : $a_p(t) = 0,28 \cdot u(t)$ d'où $A_p(p) = \frac{0,28}{p}$

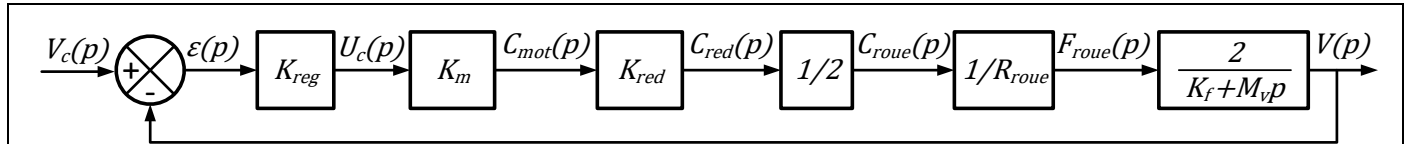
$$\text{Ainsi : } V(p) = \frac{0,28}{p} \frac{4280}{32+1940p}$$

En utilisant le théorème de la valeur finale, on écrit :

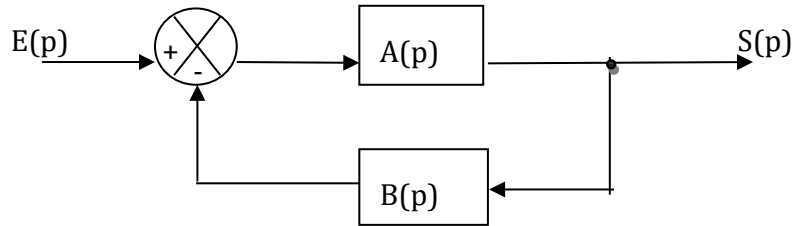
$$v_{lim} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pV(p) = \lim_{p \rightarrow 0} 0,28 \frac{4280}{32+1940p} = 37,4 \text{ m/s} \Rightarrow v_{lim} = 134,8 \text{ km/h}$$

$$\text{De même pour } a_p(t) = u(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{4280}{32+1940p} = 133,7 \text{ m/s} \Rightarrow v_{lim} = 481,3 \text{ km/h}$$

Q 6.



Les fonctions de transfert en série se multiplient. Donc on obtient la forme de schéma bloc du cours suivant avec $A(p) = H_{mc}(p) = \frac{V(p)}{A_p(p)} = K_p K_m K_{red} \frac{1}{2} \frac{1}{R_{roue}} \frac{2}{K_f + M_v p} = \frac{4280}{32 + 1940p}$ et $B(p) = 1$



La formule du cours étant $FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$

On a alors :

$$H_{mr}(p) = \frac{V(p)}{V_c(p)} = \frac{K_{reg} K_m K_{red} \frac{1}{2} \frac{1}{R_{roue}} \frac{2}{K_f + M_v p}}{1 + K_{reg} K_m K_{red} \frac{1}{2} \frac{1}{R_{roue}} \frac{2}{K_f + M_v p}} \Rightarrow H_{mr}(p) = \frac{K_{reg} K_m K_{red}}{K_{reg} K_m K_{red} + R_{roue} (K_f + M_v p)}$$

Q 7.

Pour mettre $H_{mr}(p)$ sous forme canonique il faut diviser numérateur et dénominateur par :

$$32 + 856 K_{reg}$$

on obtient ainsi :

$$H_{mr}(p) = \frac{\frac{856 K_{reg}}{32 + 856 K_{reg}}}{1 + \frac{1940}{32 + 856 K_{reg}} p} = \frac{K}{1 + Tp} \text{ avec } K = \frac{856 K_{reg}}{32 + 856 K_{reg}} \text{ et } T = \frac{1940}{32 + 856 K_{reg}} \text{ forme canonique du premier}$$

ordre.

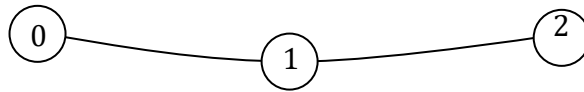
Q 8.

On prévoit ainsi les valeurs finales des réponses à un échelon de consigne de 17m/s :

$$v_{\infty} = 17 \cdot K = 17 \frac{856 K_{reg}}{32 + 856 K_{reg}} = 15,8 \frac{m}{s} \text{ L'asservissement n'est pas parfaitement précis ainsi réglé.}$$

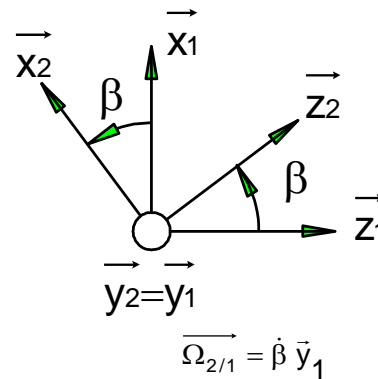
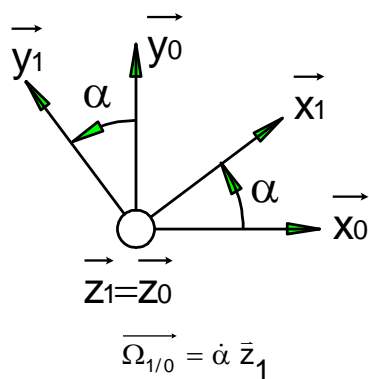
Manège à sensations

Q 1. Réaliser un graphe des liaisons. Préciser le paramètre de mouvement associé à chaque liaison.



Liaison	Nom de la liaison	Paramètre
L_{01}	Pivot d'axe (O, \vec{z}_1)	α
L_{12}	Pivot d'axe (A, \vec{y}_1)	β

Q 2. Réaliser les figures de calcul de changement de base correspondant. En déduire les vecteurs instantanés de rotation sous chaque figure.



Q 3.

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_0 = -\sin \alpha \vec{z}_0$$

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_0 = \vec{x}_1 \wedge \vec{z}_1 = -\vec{y}_1$$

$$\vec{x}_2 \wedge \vec{z}_0 = \vec{x}_2 \wedge \vec{z}_1 = -\cos \beta \vec{y}_1$$

$$\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_2 = \vec{y}_0 \wedge (\cos \beta \vec{z}_1 + \sin \beta \vec{x}_1) = \cos \beta \vec{x}_0 - \sin \beta \cos \alpha \vec{z}_0$$

Q 4. Déterminer $\vec{V}(A/0)$ puis $\vec{V}(G/0)$ vérifier l'homogénéité des résultats. Déterminer la valeur maximale de la norme de $\vec{V}(A/0)$ pour une valeur de $\dot{\alpha} = 3 \text{rad/s}$.

Par définition le vecteur vitesse est le vecteur dérivé du vecteur position :

$$\vec{V}(A/0) = \frac{d\vec{OA}}{dt_{/0}} = a \cdot \frac{d\vec{x}_1}{dt_{/0}} = a \cdot \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 = a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1$$

$$\boxed{\vec{V}(A/0) = a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1}$$

$$\vec{V}(G/0) = \frac{d\vec{OG}}{dt_{/0}} = \frac{d\vec{OA}}{dt_{/0}} + \frac{d\vec{AG}}{dt_{/0}} = a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 + b \cdot \frac{d\vec{x}_2}{dt_{/0}}$$

$$\cdot \frac{d\vec{x}_2}{dt_{/0}} = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{x}_2 = \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 \wedge \vec{x}_2 + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2 = -\dot{\beta} \cdot \vec{z}_2 + \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \vec{y}_1 \text{ et ainsi :}$$

$$\boxed{\vec{V}(G/0) = (a + b \cos \beta) \dot{\alpha} \vec{y}_1 - b \dot{\beta} \vec{z}_2}$$

$$\boxed{\|\vec{V}(A/0)\| = a \cdot \dot{\alpha} = 3.3 = 9 \text{m.s}^{-1} = 32,4 \text{km/h}}$$

Q 5. Déterminer la condition sur les paramètres de mouvement et leurs dérivées temporelles qui permet d'assurer en permanence l'exigence 1 du cahier des charges. Et si $\dot{\alpha} = 3 \text{ rad/s}$, quelle devra être la valeur maxi de $\dot{\beta}$ dans la position particulière $\beta = 0$.

Il faut alors vérifier $\|\vec{V}(G, 2/0)\| < V_{\max}$

Soit $\|(a + b \cos \beta) \dot{\alpha} \vec{y}_1 + b \dot{\beta} \vec{z}_2\| < V_{\max}$

Et donc à tout instant :

$$\sqrt{(a + b \cos \beta)^2 \dot{\alpha}^2 + b^2 \dot{\beta}^2} < V_{\max}$$

Si $\dot{\alpha} = 3 \text{ rad/s}$ et $\beta = 0$ on a alors :

$$\sqrt{4^2 \cdot 3^2 + 1^2 \dot{\beta}^2} < V_{\max} \text{ et ainsi } |\dot{\beta}| < \sqrt{V_{\max}^2 - 144}$$

Q 6. Déterminer l'expression $\vec{a}(G/0)$. On la mettra sous la forme :

$\vec{a}(G/0) = c_1 \cdot \ddot{\alpha} + c_2 \cdot \dot{\alpha}^2 + c_3 \cdot \ddot{\beta} + c_4 \cdot \dot{\beta}^2 + c_5 \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta}$ avec c_i des coefficients à déterminer

Par définition $\vec{a}(G/0) = \frac{d\vec{V}(G/0)}{dt_{/0}} = \frac{d(a + b \cos \beta) \dot{\alpha} \vec{y}_1 - b \dot{\beta} \vec{z}_2}{dt_{/0}}$

$$\cdot \frac{d\vec{z}_2}{dt_{/0}} = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{z}_2 = \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 \wedge \vec{z}_2 + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2 = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + \dot{\alpha} \cdot \sin \beta \vec{y}_1$$

$$\cdot \frac{d\vec{y}_1}{dt_{/0}} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{y}_1 = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1$$

Ainsi

$$\vec{a}(G/0) = (a + b \cos \beta) \ddot{\alpha} \vec{y}_1 - (a + b \cos \beta) \dot{\alpha}^2 \vec{x}_1 - b \ddot{\beta} \vec{z}_2 - b \dot{\beta}^2 \vec{z}_2 - 2b \sin \beta \dot{\alpha} \dot{\beta} \vec{y}_1$$

Q 7. Déterminer la condition sur la valeur de la vitesse angulaire (en tour par minute) du bras 1 par rapport au sol 0 qui permet d'assurer en permanence l'exigence 2 du cahier des charges.

Dans ce cas particulier $\beta = \frac{\pi}{2}$ et $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \text{cte}$ donc :

$$\vec{a}(G/0) = \frac{d\vec{V}(G/0)}{dt_{/0}} = -a \dot{\alpha}^2 \vec{x}_1$$

on doit alors vérifier l'exigence 2 telle que :

$$a \dot{\alpha}^2 < 3g \text{ soit } \dot{\alpha} < \sqrt{\frac{3g}{a}} \text{ et donc } \dot{\alpha} < 3,312 \text{ rad/s}$$