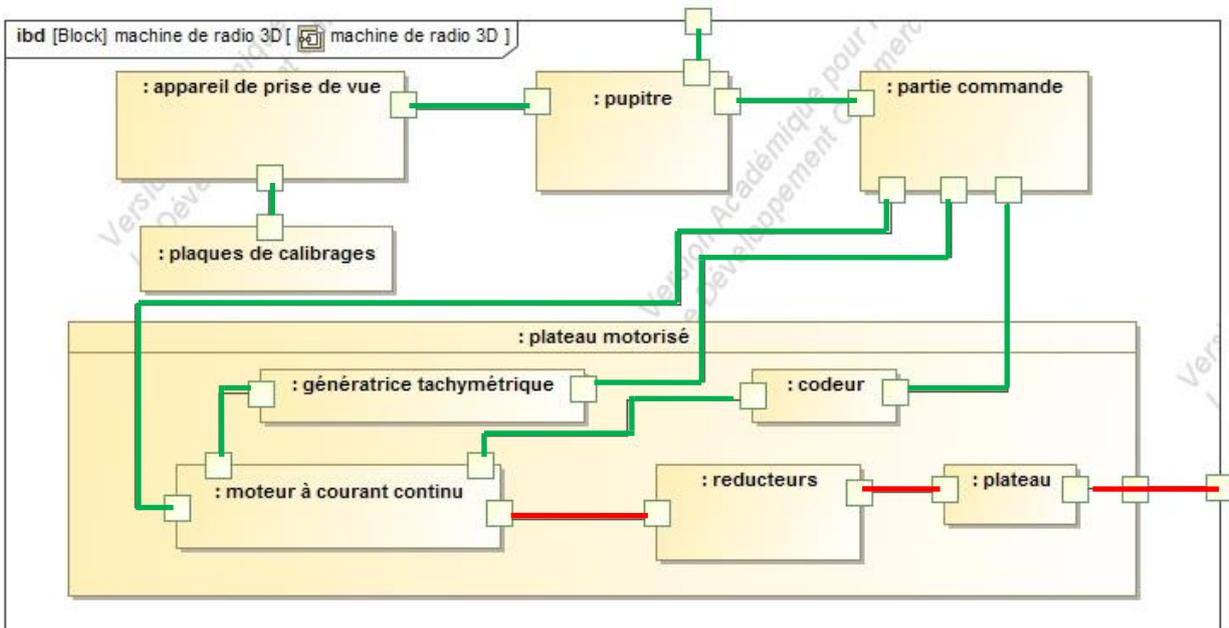


Machine de radiographie

Question 1 :



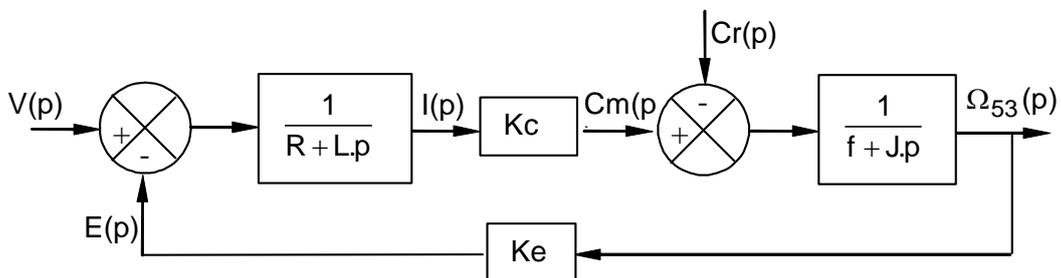
1/ Étude du moteur seul.

Question 2 : Les conditions initiales étant nulles, écrire les transformées de Laplace des équations (1) à (4) numérotées (1') à (4').

- Loi d'Ohm dans le circuit d'induit : $V(p) = E(p) + R.I(p) + L.p.I(p)$ (1)
- Équations de l'électromagnétisme dans le moteur : $E(p) = K_e.\Omega_{53}(p)$ (2)
 $C_m(p) = K_c.I(p)$ (3)
- Équation de la dynamique de l'arbre moteur : $C_m(p) - C_r(p) - f.\Omega_{53}(p) = J.p.\Omega_{53}(p)$ (4)

Question 3 : Mettre le système sous la forme du schéma-bloc suivant.

(On précisera les différentes fonctions de transfert des différents blocs).



NB : CE SCHEMA-BLOC NE REPRESENTE PAS UN SYSTEME ASSERVI MAIS SEULEMENT LA MODELISATION D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU. LA BOUCLE DE RETOUR N'EST PAS UNE BOUCLE D'ASSERVISSEMENT.

Question 4 : Exprimer de façon littérale $\Omega_{53}(p)$ en fonction de $V(p)$ et $Cr(p) = 0$.

$$\Omega_{53}(p) = \frac{\frac{1}{R+Lp} \cdot K_c \cdot \frac{1}{f+Jp}}{1 + K_e \cdot \frac{1}{R+Lp} \cdot K_c \cdot \frac{1}{f+Jp}} V(p) = \frac{K_c}{(R+Lp)(f+Jp) + K_e \cdot K_c} V(p)$$

$$\Omega_{53}(p) = \frac{\frac{K_c}{Rf + K_e K_c}}{1 + \frac{RJ + Lf}{Rf + K_e K_c} p + \frac{LJ}{Rf + K_e K_c} p^2} \cdot V(p) + \frac{1 + \frac{L}{R} p}{\frac{K_e}{R}} \cdot \frac{\frac{K_c}{Rf + K_e K_c}}{1 + \frac{RJ + Lf}{Rf + K_e K_c} p + \frac{LJ}{Rf + K_e K_c} p^2} \cdot Cr(p)$$

f=0 et Cr=0

Question 5 : Donner la nouvelle fonction de transfert $M(p) = \frac{\Omega_{53}(p)}{V(p)}$ du moteur que l'on exprimera sous la forme canonique d'un système du 2nd ordre de gain K_m . Donner les expressions littérales des paramètres canoniques et préciser leurs unités.

$$M(p) = \frac{\Omega_{53}}{V} = \frac{1/K_e}{1 + \frac{RJ}{K_e \cdot K_c} p + \frac{LJ}{K_e \cdot K_c} p^2} = \frac{K_m}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_e \cdot K_c}{LJ}} \text{ en rad/s, } \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{J}{K_e \cdot K_c \cdot L}} \text{ sans unité et } K_m = 1/K_e \text{ en rad.s}^{-1}.V^{-1}$$

Question 6 : Déterminer les valeurs de temps de réponse et dépassements éventuels à l'aide des formules et abaque du cours.

$$\text{AN : } \omega_0 = 11,1 \text{ rad/s, } \xi = \sqrt{\frac{2}{10}} = 0,45$$

$$\xi < 1 \text{ donc dépassement de } D_1 = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0,2 = 20\%$$

$\xi = 0,45$ correspond à un temps de réponse réduit sur l'abaque de 5 (sur la « 1^{ère} marche »)

$$\text{On a donc : } t_r \cdot \omega_0 = 5,2 \text{ d'où } t_r = 0,47 \text{ s}$$

2/ Étude du réducteur seul.

Question 7 : Déterminer en fonction de r_1 et r_2 la fonction de transfert $H_R(p)$ du réducteur de vitesse constitué du train planétaire R1 et de l'engrenage de sortie R2.

$$\Omega_{43}(p) = \Omega_{53}(p) \cdot r_1 \cdot r_2 \Rightarrow H_R = \frac{\Omega_{43}(p)}{\Omega_{53}(p)} = r_1 \cdot r_2$$

3/ Étude du système complet (moteur + réducteur) non perturbé : Cr(p)=0.

Question 8 : Déterminer la fonction de transfert $H(p)$ de l'ensemble moteur + réducteur de vitesse.

$$\text{On a } H_{\text{mot}}(p) = \frac{\Omega_{53}}{V} = \frac{\frac{1}{R+Lp} \cdot K_c \cdot \frac{1}{Jp}}{1 + K_e \cdot \frac{1}{R+Lp} \cdot K_c \cdot \frac{1}{Jp}} = \frac{K_c}{RJp + LJp^2 + K_e \cdot K_c} = \frac{1/K_e}{1 + \frac{RJ}{K_e \cdot K_c} p + \frac{LJ}{K_e \cdot K_c} p^2} \text{ et } H_R = \frac{\Omega_{43}}{\Omega_{53}} = r_1 \cdot r_2$$

$$\text{Donc : } H(p) = \frac{\Omega_{43}(p)}{V(p)} = \frac{1/K_e}{1 + \frac{RJ}{K_e \cdot K_c} p + \frac{LJ}{K_e \cdot K_c} p^2} \cdot r_1 \cdot r_2$$

Question 9 : Déterminer la valeur des paramètres caractéristiques.

$$\omega_0 = 11,1 \text{ rad/s}, \quad \xi = 0,63 \quad \text{gain statique : } K = \frac{r_1 r_2}{K_e} = 0,005 \text{ rad.s}^{-1}.V^{-1}$$

Question 10 : Déterminer, selon le cours, la vitesse angulaire atteinte par le plateau en régime permanent, puis retrouver ce résultat par un calcul de limite.

$$\omega_{43}(+\infty) = K.E.c = 0,005.100 = 0,5 \text{ rad/s}$$

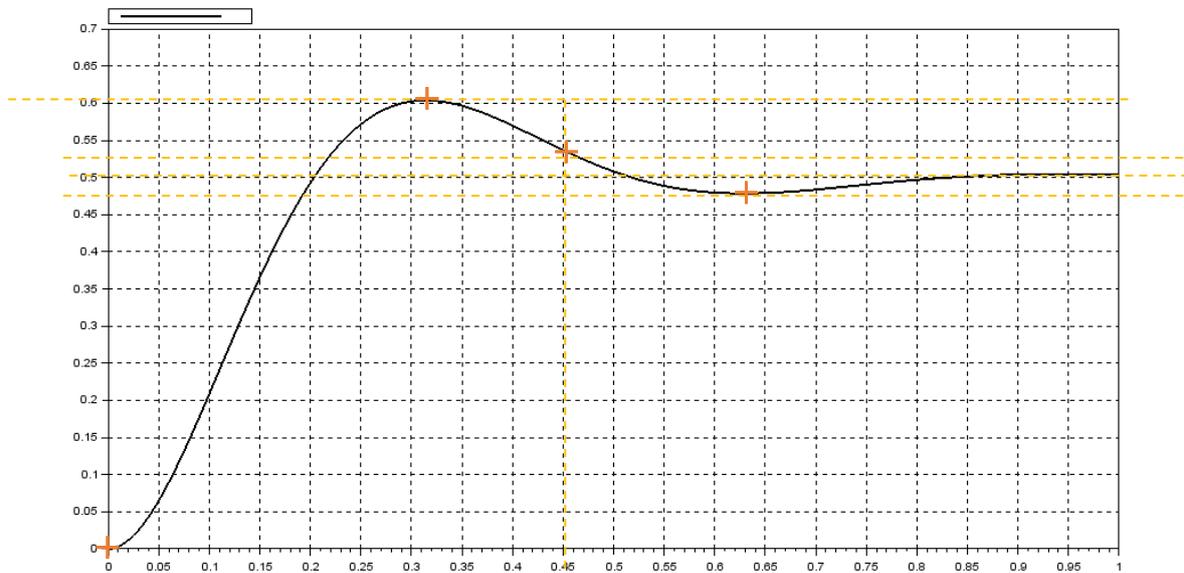
$$v(t) = 100.u(t) \Rightarrow V(p) = \frac{100}{p}$$

$$\omega_{43}(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_{43}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p.\Omega_{43}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p.H(p).V(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1/K_e}{1 + \frac{RJ}{K_e.K_c} p} r_1 r_2 \cdot \frac{100}{p} = 0,5$$

$$\omega_{43}(+\infty) = 0,5 \text{ rad/s}$$

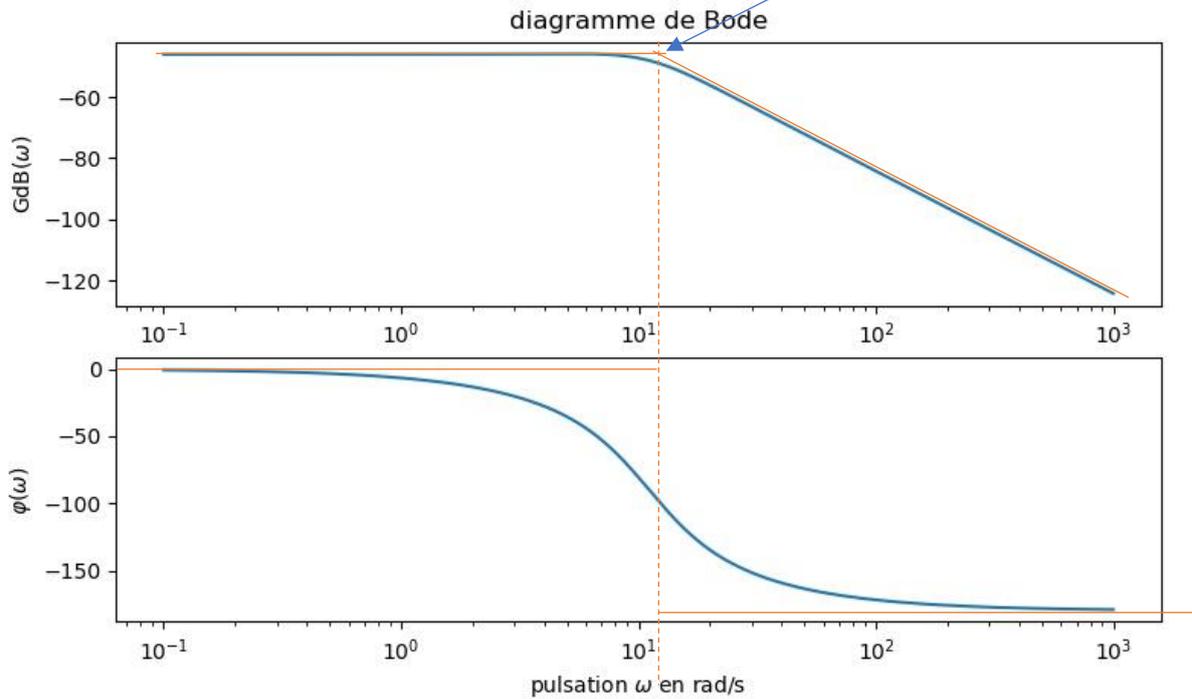
Question 11 :

En utilisant les résultats des questions précédentes on peut placer les points importants sur la courbe de réponse pseudo périodique demandée



Question 12 :

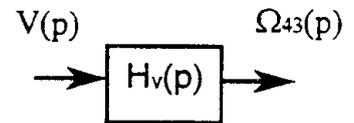
Pour tracer ce diagramme, il faut placer la cassure en $\omega_0 = 11,1 \text{ rad/s}$, $20 \log(K) = 20 \log(0,005) = -46 \text{ dB}$



4/ Étude du système complet asservi en vitesse et non perturbé : Cr(p)=0.

Utilisation d'un correcteur proportionnel.

Question 13 : Mettre le schéma-bloc précédent sous la forme ci-contre. En déduire l'expression littérale de la fonction de transfert en boucle fermée du système complet $H_v(p)$ en fonction de K_{cor} . Quel est l'ordre de $H_v(p)$? Mettre la fonction de transfert sous forme canonique.



$$H_v = H_R \cdot \frac{H_{cor} \cdot H_{mot}}{1 + a \cdot H_{cor} \cdot H_{mot}} \quad \text{avec} \quad H_{mot}(p) = \frac{K_m}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

$$H_v(p) = \frac{K_{cor} \cdot \frac{K_m}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} \cdot r_1 r_2}{1 + a \cdot K_{cor} \cdot \frac{K_m}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}} = \frac{K_{cor} \cdot K_m \cdot r_1 r_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2 + a \cdot K_{cor} \cdot K_m}$$

D'où

$$H_v(p) = \frac{\frac{K_{cor} \cdot K_m}{1 + a \cdot K_{cor} \cdot K_m} \cdot r_1 r_2}{1 + \frac{2\xi}{(1 + a \cdot K_{cor} \cdot K_m) \omega_0} p + \frac{1}{(1 + a \cdot K_{cor} \cdot K_m) \omega_0^2} p^2}$$

Ordre 2

Question 14 :

On identifie une nouvelle pulsation propre :

$$\omega_0^* = \sqrt{1 + a.K_{cor}.K_m} \omega_0$$

Et un nouveau coefficient d'amortissement :

$$\frac{2\xi^*}{\omega_0^*} = \frac{2\xi}{(1 + a.K_{cor}.K_m)\omega_0} \quad \text{d'où} \quad \xi^* = \frac{\omega_0^*}{2} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + a.K_{cor}.K_m}}$$

Donc le système bouclé a une plus grande pulsation propre mais aussi un plus petit facteur d'amortissement. Or nous partons d'un système motoréducteur déjà mal amorti. Donc le système bouclé n'est pas plus rapide car plus oscillant.

$$\text{Pour } K_{cor}=1 \quad \xi^* = \frac{\omega_0^*}{2} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + 0,06.1.2}} = \frac{0,45}{\sqrt{1,12}} = 0,425 \quad \omega_0^* = \sqrt{1,12}.11,1 = 11,75 \text{ rad/s}$$

D'après l'abaque le temps de réponse change très peu par rapport à celui du moteur $t_r = 0,47s$

$$\text{Pour } K_{cor}=10 \quad \xi^* = \frac{\omega_0^*}{2} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + 0,06.10.2}} = \frac{0,45}{\sqrt{2,2}} = 0,3 \quad \omega_0^* = \sqrt{2,2}.11,1 = 16,5 \text{ rad/s}$$

D'après l'abaque $tr.\omega_0^* = 8$ d'où $tr = \frac{8}{16,5} = 0,48s$ le temps de réponse change encore très peu

$$\text{Pour } K_{cor}=100 \quad \xi^* = \frac{\omega_0^*}{2} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + 0,06.100.2}} = \frac{0,45}{\sqrt{13}} = 0,12 \quad \omega_0^* = \sqrt{13}.11,1 = 40 \text{ rad/s}$$

D'après l'abaque $tr.\omega_0^* \approx 27$ d'où $tr = \frac{27}{40} = 0,67s$ le temps de réponse augmente

Question 15 : Donner la vitesse angulaire atteinte par le plateau en régime permanent en fonction de Kcor.

$$\omega_{43}(+\infty) = K.Ec = \frac{K_{cor}.K_m}{1 + a.K_{cor}.K_m} . 100$$

$$\text{Donc } \boxed{\omega_{43}(+\infty) = \frac{3.10^{-2}.K_{cor}}{1 + 3.10^{-4}.K_{cor}}}$$

Question 16 : Exprimer la valeur de l'écart statique $\varepsilon_s (= \varepsilon(+\infty))$ ou écart en régime permanent en fonction de Kcor.

Pour cela déterminer l'expression de $\varepsilon(p)$, puis $\varepsilon(+\infty)$ par un calcul de limite.

$$\varepsilon(p) = V(p) - V_\Omega(p) \quad \text{avec} \quad V_\Omega(p) = a.H_{mot}(p).H_{cor}(p).\varepsilon(p)$$

$$\text{donc } \varepsilon(p) = V(p) - a.H_{mot}(p).H_{cor}(p).\varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p).[1 + a.H_{mot}(p).H_{cor}(p)] = V(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{V(p)}{1 + a.H_{mot}(p).H_{cor}(p)} = \frac{\frac{100}{p}}{1 + 0,06.\frac{K_m}{1 + \tau_m p}.K_{cor}}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\varepsilon_s = \varepsilon(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p.\varepsilon(p) = \frac{100}{1 + 0,06.K_m.K_{cor}} = \frac{100}{1 + 0,0003.K_{cor}}}$$

Question 17 : La valeur de K_{cor} étant réglable, préciser si l'écart statique est une fonction croissante ou décroissante de K_{cor} ?

$\varepsilon_s = \frac{100}{1 + 0,0003 \cdot K_{cor}}$ est une fonction décroissante de K_{cor} que l'on a donc intérêt à choisir grand, vis-à-vis de ce critère de précision.

Question 18 : Donner pour les réponses indicielles représentées à la page précédente pour différentes valeurs de K_{cor} , les valeurs de performances dans le tableau du document réponse page 11. En déduire si un réglage permet de respecter le cahier des charges en vitesse.

	Ecart statique en rad/s	Temps de réponse à 5% en s	Dépassement en %
$K_{cor}=10$	1,87	0,048	33%
$K_{cor}=5$	2,53	0,056	25%
$K_{cor}=2$	3,33	0,062	24%
$K_{cor}=1$	3,63	0,066	20%
$K_{cor}=0,5$	3,88	0,07	18%

Aucun réglage ne respecte la précision requise
Seul $K_{cor}=10$ respecte le critère de rapidité.
Aucun réglage ne respecte le critère de dépassement.

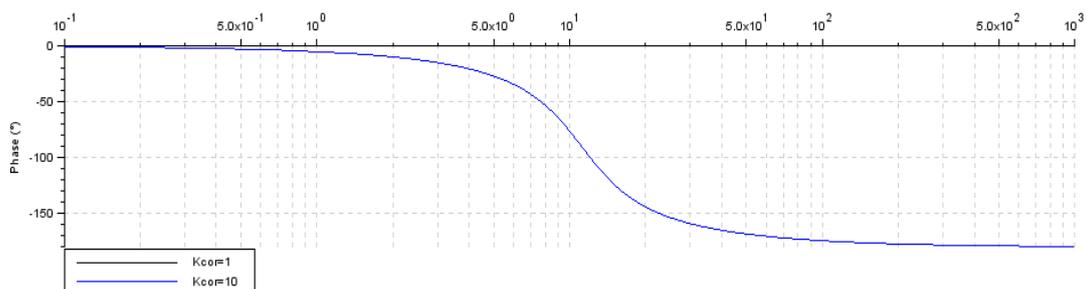
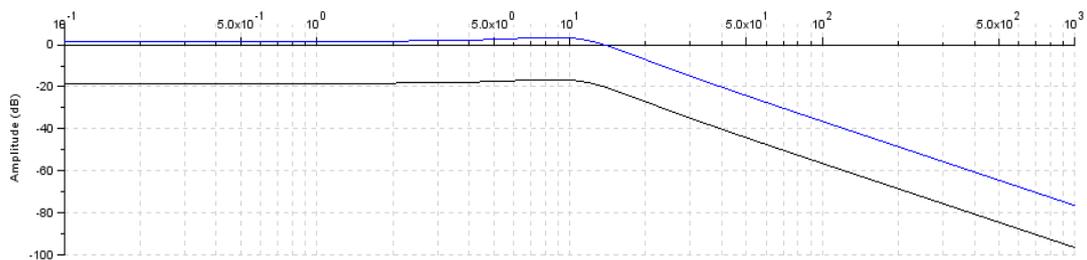
Question 19 : Calculer la FTBO définie par $H_{BO}(p) = \frac{V_{\Omega}(p)}{\varepsilon(p)}$. Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et réels de la FTBO en correction proportionnelle pour les réglages $K_{cor}=1$ et $K_{cor}=10$ sur le document réponse.

$$H_{BO}(p) = \frac{V_{\Omega}(p)}{\varepsilon(p)} = a \cdot H_{cor}(p) \cdot H_{mot}(p) = a \cdot K_{cor} \cdot \frac{K_m}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

On déduit donc ce diagramme de Bode de celui de la question 12 du moteur seul par une translation du diagramme de gain, le diagramme de phase restant inchangé. Ainsi :

Pour $K_{cor}=1$ Il faut placer la cassure en $\omega_0 = 11,1 \text{ rad/s}$, $20 \log(a \cdot 1 \cdot K_m) = -18,4 \text{ dB}$

Pour $K_{cor}=10$ Il faut placer la cassure en $\omega_0 = 11,1 \text{ rad/s}$, $20 \log(a \cdot 10 \cdot K_m) = 1,6 \text{ dB}$



Utilisation d'un correcteur proportionnel-intégral.

Question 20 : Exprimer la valeur de l'écart statique $\varepsilon_s (= \varepsilon(+\infty))$ ou écart en régime permanent du système équipé de ce nouveau correcteur.

$$H_{\text{cor}}(p) = 5 \cdot \left(1 + \frac{1}{0,0125 \cdot p} \right) = \frac{40 + 5p}{p}$$

$$\varepsilon(p) = V(p) - V_{\Omega}(p) \quad \text{avec} \quad V_{\Omega}(p) = a \cdot H_{\text{mot}}(p) \cdot H_{\text{cor}}(p) \cdot \varepsilon(p)$$

$$\text{donc} \quad \varepsilon(p) = V(p) - a \cdot H_{\text{mot}}(p) \cdot H_{\text{cor}}(p) \cdot \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) \cdot [1 + a \cdot H_{\text{mot}}(p) \cdot H_{\text{cor}}(p)] = V(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{V(p)}{1 + a \cdot H_{\text{mot}}(p) \cdot H_{\text{cor}}(p)}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{100 \cdot 12500}{600000} \cdot \frac{1 + \frac{100}{12500}p + \frac{1}{12500}p^2}{1 + \frac{20000}{600000}p + \frac{100}{600000}p^2 + \frac{1}{600000}p^3}$$

Par conséquent :

$$\varepsilon_s = \varepsilon(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = 0$$

Question 21 : En déduire l'avantage que procure le caractère « intégral » de ce correcteur pour le système.

L'annulation de l'écart statique et donc une amélioration de la performance de précision.

Question 22 : Tracer les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement ainsi réglé. On procèdera par superposition des diagrammes de Bode asymptotique des différents facteurs de la FTBO.

$$H_{\text{cor}}(p) = 5 \cdot \left(1 + \frac{1}{0,0125 \cdot p} \right) = \frac{40 + 5p}{p}$$

Il faut décomposer alors la FTBO comme un produit de fonctions de transfert canoniques.

$$H_{\text{cor}}(p) = 5 \cdot \left(1 + \frac{1}{0,0125 \cdot p} \right) = \frac{40 + 5p}{p}$$

$$H_{\text{BO}}(p) = a \cdot H_{\text{cor}}(p) = a \cdot \frac{40 + 5p}{p} \cdot \frac{K_m}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

$$H_{\text{BO}}(p) = a \cdot H_{\text{cor}}(p) = 40 \cdot a \cdot K_m \cdot (1 + 0,125p) \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} = H1 \cdot H2 \cdot H3 \cdot H4$$

$$H1(p) = 40 \cdot a \cdot K_m$$

$$H2(p) = 1 + 0,125p$$

$$H3(p) = \frac{1}{p}$$

$$H4(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

On place les abscisses des cassures en $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{0,125} = 8\text{rad/s}$ et $\omega_0 = 11,1\text{rad/s}$

On établit ensuite la valeur des pentes des asymptotes pour chaque intervalle de pulsation séparé par ces pulsations de cassures. On peut le présenter sous forme de tableau :

ω	0	$\frac{1}{\tau}$	ω_0	$+\infty$
H1	0dB/dec	0dB/dec	0dB/dec	
H2	0dB/dec	+20dB/dec	+20dB/dec	
H3	-20dB/dec	-20dB/dec	-20dB/dec	
H4	0dB/dec	0dB/dec	-40dB/dec	
H_{BO}	$+\infty$ 20dB/dec	ω_0 0dB/dec	-40dB/dec	$-\infty$

On y place les valeurs d'ordonnées en dB utile. Ici seule l'ordonnée de la première cassure en $\frac{1}{\tau}$ est utile :

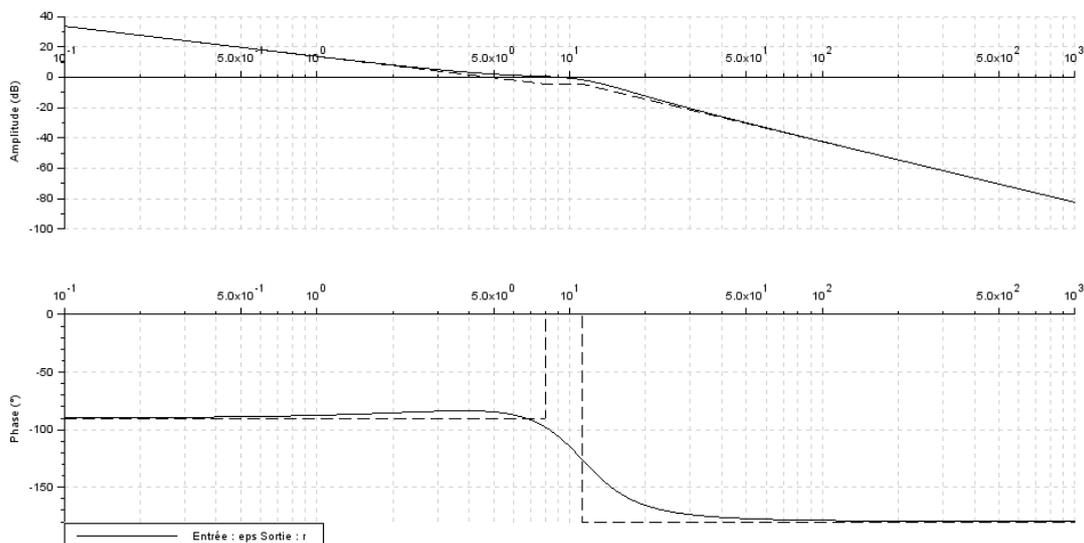
On trouve $GdB\left(\frac{1}{\tau}\right) = 20\log(40.a.K_m) - 20\log\left(\frac{1}{\tau}\right) = 19,64 - 18 = 1,64\text{dB}$

Puis on représente les asymptotes en repartant de ce point (8rad/s ; 1,64dB) à gauche de pente -20dB/dec puis à droite horizontale de pente 0dB/dec. On « stoppe » cette asymptote à l'abscisse ω_0 pour ensuite passant par ce point représenter l'asymptote de droite de pente -40dB/dec.

Le diagramme asymptotique de phase se déduit de celui de gain en dB car à 0dB/dec correspond 0°, -20dB/dec - 90° et -40dB/dec correspond -180° de phase.

On peut tracer l'allure de la courbe réelle de gain et de phase passant « près » des asymptotes. Si il n'y a pas de question précise sur les points on trace sans plus de précision ces courbes.

On pourrait placer plus précisément correspondant à la faible résonance du second ordre H4, mais ce n'ets pas nécessaire si la question n'est pas explicitement posée.



La mise en place du correcteur proportionnelle intégral permet d'obtenir une réponse précise de l'asservissement de vitesse avec un dépassement maîtrisable qui demande toutefois des précautions pour obtenir des marges de sécurité vis-à-vis du risque d'instabilité (cette démarche sera étudiée dans un cours prochain). Pour information, voici la réponse prévue par calcul avec un tel correcteur :

