

DATE			HEURE DÉBUT	HEURE FIN
2	03	2024	8 h 10	11 h 10

CLASSE	<h1>MPSI</h1>
---------------	---------------

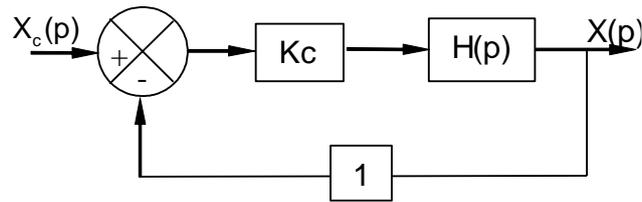
MATIERE	<h1>S.I.I.</h1>
----------------	-----------------

PROFESSEUR	LILLONI 169
-------------------	-------------

CONSIGNES	Calculatrice	OUI <input checked="" type="checkbox"/>	NON <input type="checkbox"/>
	Documents	OUI <input type="checkbox"/>	NON <input checked="" type="checkbox"/>
	<ul style="list-style-type: none"> - Sortie aux toilettes de 5 min maxi autorisée à partir de 9h15. - Pas de téléphone sinon exclusion immédiate. - Répondre sur le document réponse (une copie double supplémentaire est tolérée) 		

Asservissement de position

Un asservissement de position est modélisé par le schéma bloc suivant :



On veut identifier la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée $H(p)$ second ordre intégré, dont la réponse harmonique est représentée sur le document réponse.

$$H(p) = \frac{K}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

1. Exprimer les gain $GdB(\omega)$ et déphasage $\varphi(\omega)$ correspondant. Tracer les asymptotes et donner leurs équations en fonction des paramètres canoniques recherchés. Indiquer clairement les abscisses et ordonnées des cassures sur le tracé fourni. Donner leurs expressions théoriques en fonctions des paramètres canoniques. Déterminer enfin les valeurs numériques des gain K , facteur d'amortissement ξ et pulsation propre ω_0 .
2. Rappeler l'énoncé du critère du revers et indiquer les marges de gain et de phase sur le diagramme de Bode précédent et donner leurs valeurs.
3. Déterminer alors la valeur de gain du correcteur Kc permettant d'assurer une marge de phase de 45° . On utilisera seulement un relevé de valeur de gain pour une pulsation à préciser. Un long développement de calculs n'est pas nécessaire ici.
4. Déterminer à l'aide de la formule de Black la fonction de transfert en boucle fermée du système ainsi réglé que l'on mettra sous la forme canonique ci-dessous en précisant les valeurs numériques de a , b et c : $H_{bf}(p) = \frac{1}{1 + a.p + b.p^2 + c.p^3}$
5. L'asservissement ainsi réglé a une réponse indicielle représenté sur le document réponse. On peut alors identifier un second ordre approchant son comportement. Déterminer ses paramètres canoniques. On rappellera les formules utiles du premier dépassement et de la pseudo période.

Stabilisateur gyroscopique de bateau

1. Présentation

1.1. Mouvement de roulis

Le système étudié est un dispositif de stabilisation gyroscopique pour bateau permettant de neutraliser le mouvement de roulis (voir **Figure 1**). Cette rotation suivant l'axe longitudinal du navire est la première cause du mal de mer. Dans tout le sujet, seul ce mouvement de roulis, rotation autour de l'axe (O, \vec{x}_0) , sera considéré. Si l'idée d'utiliser un gyroscope pour stabiliser un bateau remonte à plus d'un siècle, sa mise en œuvre n'est que très récente notamment grâce à la société Seakeeper. Les principaux verrous technologiques étaient la capacité à mettre et maintenir en rotation un volant d'inertie à des vitesses très élevées ainsi qu'à développer des moyens de contrôle actif afin de s'adapter à toutes les conditions de houle. La demande concerne en particulier la navigation de plaisance avec une exigence de performance forte lors de la phase de fonctionnement bateau à l'arrêt, ancre descendue.

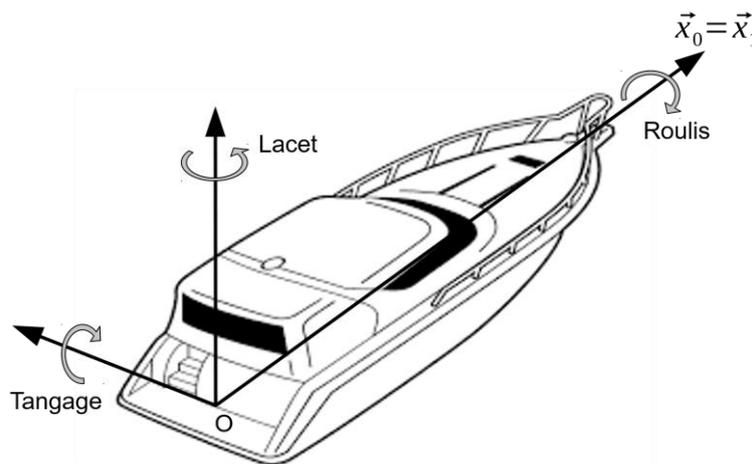


Figure 1 : Définition des 3 rotations orientant le bateau par rapport au référentiel terrestre

1.2. Le stabilisateur gyroscopique

Les stabilisateurs gyroscopiques peuvent être adaptés à tous les types d'embarcation grâce à un encombrement réduit et une masse limitée par rapport aux caractéristiques des navires. Le maintien de leur efficacité est assuré pour une grande variété de positionnement sur le bateau. Ainsi, leur installation peut être envisagée directement lors de la construction du navire aussi bien que par une intégration en cours de cycle de vie de l'embarcation. La **Figure 2** représente l'installation d'un stabilisateur dans le plan de symétrie du bateau $(O, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$, configuration retenue par la suite de l'étude.

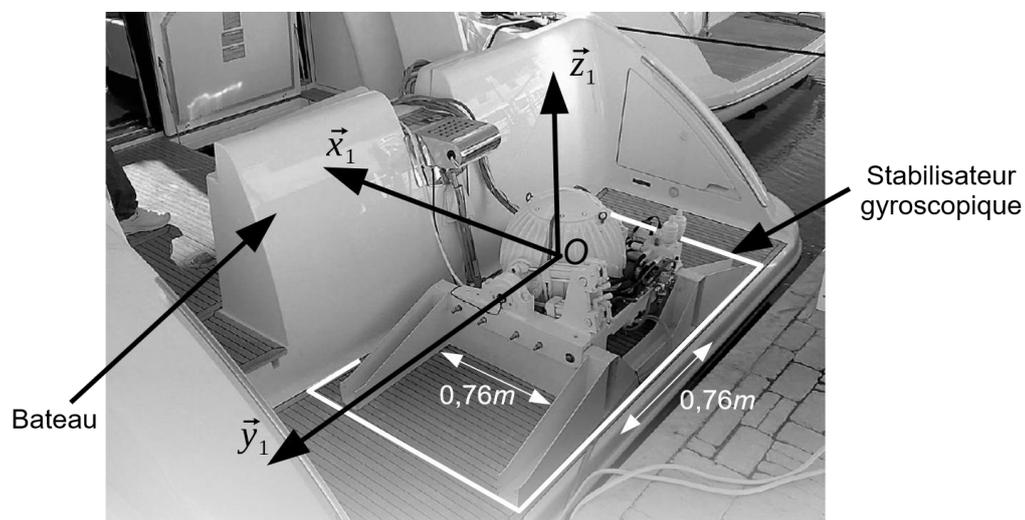


Figure 2 : Stabilisateur gyroscopique monté sur un bateau

Le stabilisateur (voir **Figure 3**) est constitué d'une enceinte **2** en liaison pivot selon l'axe de Cardan (O, \vec{y}_1) par rapport au bateau **1**. Un volant d'inertie **3**, en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_2) par rapport à l'enceinte **2**, est maintenu en rotation grâce à un moteur électrique.

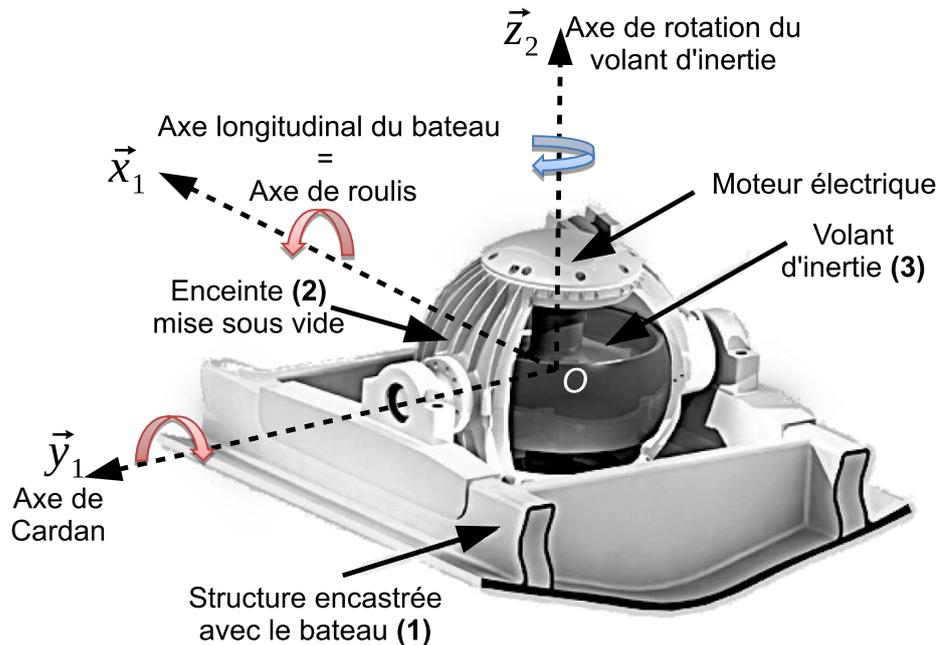


Figure 3 : Structure interne du stabilisateur gyroscopique

Les vitesses angulaires très élevées (de l'ordre de $10000 \text{ tr.min}^{-1}$ au maximum) du volant nécessitent :

- la mise sous vide de l'enceinte **2** afin de limiter les actions mécaniques aérodynamiques qui s'exercent sur le volant d'inertie **3** lors de son mouvement de rotation et ainsi minimiser la consommation électrique ;
- le développement d'une motorisation spécifique avec entraînement direct ;
- un guidage de haute précision (de l'ordre du micromètre) réalisé par des roulements à billes en céramique.

Si la compréhension de la dynamique du stabilisateur nécessite la mise en équation du système, le découpage séquentiel du fonctionnement peut être décrit de la manière suivante :

- l'initiation d'un mouvement de roulis du bateau **1** engendre un basculement de l'ensemble {enceinte **2**, volant d'inertie **3**} autour de l'axe de Cardan (effet gyroscopique) ;
- la combinaison de la rotation du volant et de celle de l'axe de Cardan génère alors un couple gyroscopique suivant la direction de roulis ;
- ce couple tend à s'opposer au mouvement du bateau **1** et ainsi à lui assurer une stabilisation suivant la direction de roulis ;
- il apparaît ainsi que les mouvements de roulis et de tangage sont couplés. En contrôlant le mouvement de rotation de l'axe de Cardan de façon active par un système hydraulique, les performances de stabilisation de roulis sont optimisées.

Le diagramme des exigences techniques du système Seakeeper est donné sur la **Figure 4**.

L'objectif des activités proposées dans ce sujet est d'analyser les solutions techniques qui rendent efficace le stabilisateur gyroscopique et notamment quantifier l'atténuation de l'amplitude des oscillations du bateau en roulis comme indiqué sur la Figure 5.

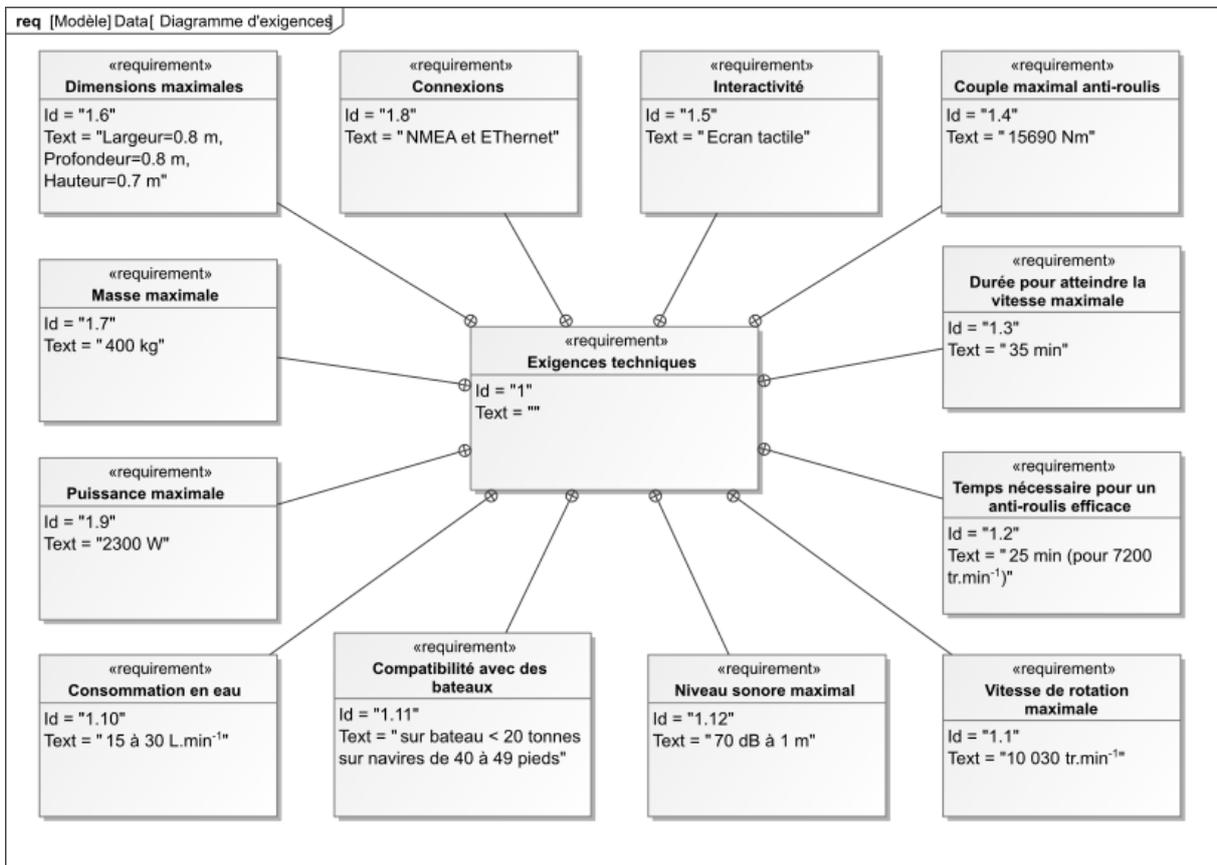


Figure 4 : Diagramme des exigences

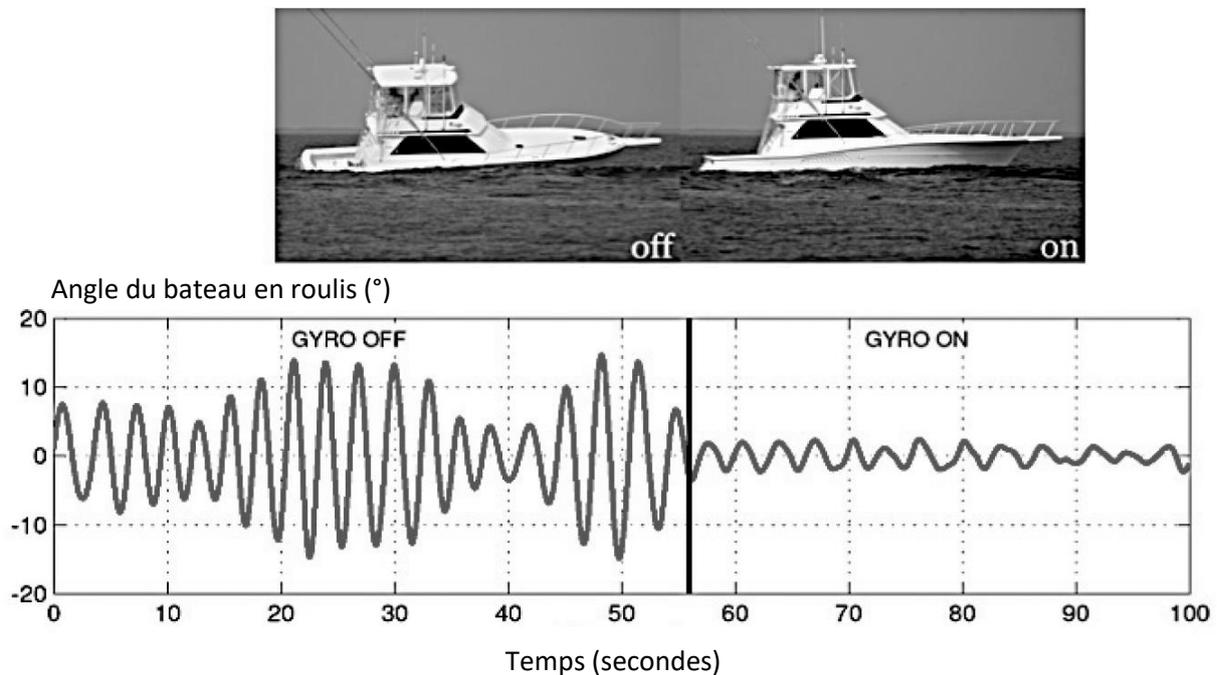


Figure 5 : Mesure des oscillations du bateau en roulis sans, puis avec, stabilisateur gyroscopique

2. Modélisation du système de contrôle

La compréhension de l'architecture du stabilisateur gyroscopique et sa mise en équation permet dans cette partie d'aboutir à un modèle de la chaîne d'énergie.

2.1. Architecture du système

La figure de l'annexe 2 présente l'architecture du régulateur hydraulique.

L'inclinaison suivant l'axe de Cardan du stabilisateur gyroscopique est commandée par un contrôleur électronique et un dispositif hydraulique de manière à optimiser le couple fourni pour diminuer le roulis du bateau.

Ce régulateur hydraulique est constitué d'un servo-distributeur commandé par le contrôleur électronique. Le servo-distributeur module le débit d'alimentation des deux vérins. La translation des vérins est transformée par la structure articulée en une rotation de l'ensemble enceinte 2 et volant d'inertie 3 autour de l'axe de Cardan. Un couple gyroscopique est alors généré sur l'axe de roulis du bateau afin de le stabiliser.

On réalise un asservissement en mesurant l'angle de roulis $\alpha(t)$ du bateau à l'aide d'une centrale inertielle. L'écart $\varepsilon(t)$ entre la consigne d'angle $\alpha_c(t)$ et la mesure de l'angle $\alpha(t)$ est traité par le contrôleur électronique qui délivre le courant de commande $i(t)$ au servo-distributeur.

Question 1. A l'aide du texte descriptif, compléter le tableau du document-réponse associé aux constituants du schéma-blocs fonctionnel de l'asservissement en position du bateau.

2.2. Modélisation de la chaîne d'énergie

2.2.1. Stabilisateur gyroscopique et bateau

Un schéma cinématique partiel du stabilisateur gyroscopique est fourni **Figure 6**. Il sera enrichi au fur et à mesure de l'étude du sujet. Le paramétrage s'établit de la manière suivante :

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, repère supposé galiléen lié à la terre ;
- $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, repère lié au bateau 1. La configuration cinématique retenue est un bateau 1 soumis à un unique mouvement de roulis d'axe (O, \vec{x}_0) par rapport à R_0 . Par souci de simplicité, on modélise la liaison entre le bateau et le repère terrestre par une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_0) avec $\alpha(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$,
- $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, repère lié à l'enceinte 2. L'enceinte 2 est en liaison pivot d'axe (O, \vec{y}_1) avec le bateau 1, paramétrée par $\beta(t) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. $\vec{\Omega}_{2/1} = \frac{d\beta(t)}{dt} \vec{y}_1$;
- $R_3(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, repère lié au volant d'inertie 3. Le volant 3 est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_2) avec l'enceinte 2, paramétrée par $\gamma(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$, $\vec{\Omega}_{3/2} = \frac{d\gamma(t)}{dt} \vec{z}_2 = \omega_m \vec{z}_2$ avec ω_m la vitesse angulaire du volant 3 par rapport à 2 supposée connue et constante.

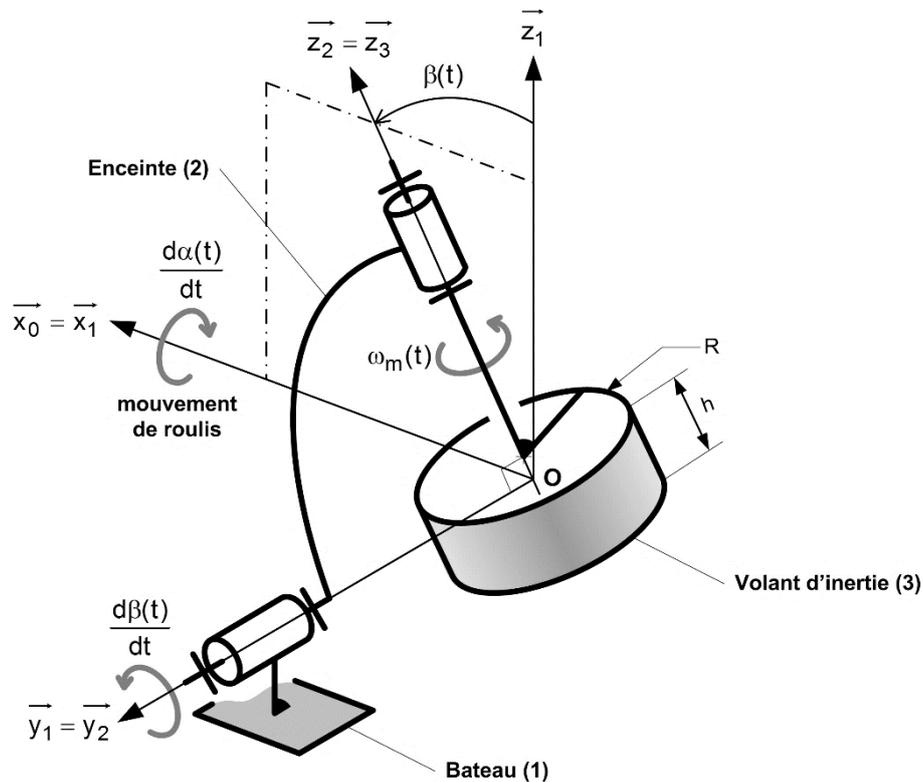


Figure 6 : Schéma cinématique partiel du stabilisateur gyroscopique (motorisation non représentée)

Question 2. Compléter les figures de changement de bases associées au paramétrage des 3 rotations. Exprimer les vecteur vitesse angulaire (ou de rotation) $\vec{\Omega}_{1/0}$, $\vec{\Omega}_{2/1}$ et $\vec{\Omega}_{3/2}$. Déterminer le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{3/0}$ en l'exprimant dans la base associée au repère R_2 .

La **Figure 7** ci-dessous représente le volant d'inertie à l'intérieur de l'enceinte.



Figure 7 : Représentation du volant d'inertie

Question 3. Compléter le graphe des liaisons du document-réponse.

Un moteur monté entre **2** et **3** (stator lié à **2** et rotor lié au volant d'inertie **3**) exerce un couple moteur. Un système nommé « modulateur hydraulique » monté entre **1** et **2** exerce une action mécanique. L'eau exerce sur le bateau **1** une action mécanique

Une étude de la dynamique des solides associée à ce modèle permet de déterminer les équations de mouvement suivantes :

$$I_g \frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} = C_h(t) + C_3 \omega_m \frac{d\alpha(t)}{dt} \quad (\text{eq 1})$$

$$I_b \frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} = \underbrace{C_{mer}(t) - f_b \frac{d\alpha(t)}{dt} - k_b \alpha(t)}_{C_{eau}(\alpha(t))} - C_3 \omega_m \frac{d\beta(t)}{dt} \quad (\text{eq 2})$$

- $C_{mer}(t)$ représente le moment de forces induit par les vagues entretenant le mouvement de roulis ;
- $-f_b \frac{d\alpha(t)}{dt}$ caractérise le moment des actions mécaniques dissipatives liées au mouvement relatif entre l'eau et la coque (f_b : coefficient de frottement visqueux) ;
- $-k_b \alpha(t)$ caractérise le moment de forces de redressement lié à l'action combinée de la pesanteur et de la pression de l'eau sur la coque (poussée d'Archimède) ;
- le terme $C_3 \omega_m \frac{d\beta(t)}{dt}$ provient du couplage gyroscopique, ω_m étant une constante.

Question 4. A partir des deux équations de dynamique (eq1, eq2) auxquelles nous appliqueront la transformée de Laplace, déterminer la fonction de transfert $H(p)$ telle que $\alpha(p) = H(p) \cdot C_{mer}(p)$ (avec $C_h = 0$) et la mettre sous la forme $\frac{1}{K + A p + B p^2}$ où les expressions de K , A et B seront précisées. Indiquer en le justifiant si le système, de fonction de transfert $H(p)$, est stable.

2.2.2. Modélisation de la structure articulée

Pour compléter le modèle de la chaîne d'action globale, il est nécessaire de déterminer les équations qui caractérisent le système hydraulique. Le système est modélisé par le schéma cinématique de la Figure 8.

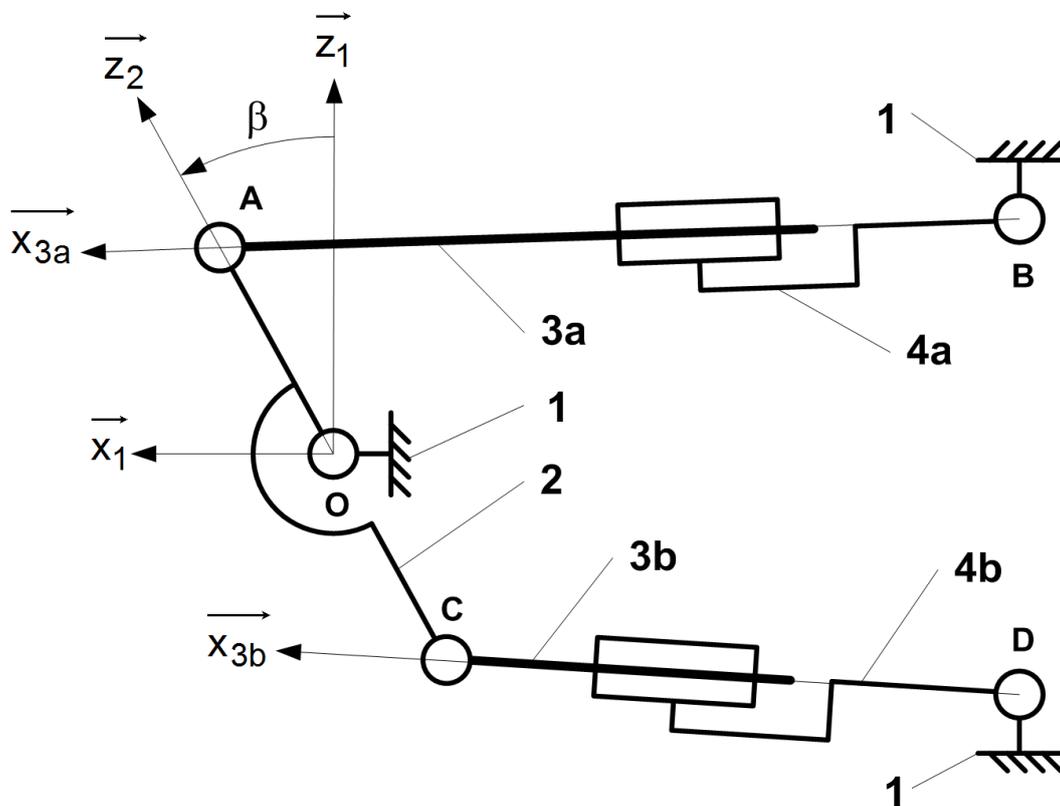


Figure 8 : Schéma cinématique de la structure articulée

On associe :

- le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ au carter du système lié au bateau **1** ;
- le repère $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ lié à l'enceinte **2**. On note $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ l'angle de l'enceinte **2** par rapport à **1** selon \vec{y}_1 ;
- le repère $R_{3a}(A, \vec{x}_{3a}, \vec{y}_1, \vec{z}_{3a})$ au vérin **a** (constitué d'une tige notée **3a** et d'un corps noté **4a**)
- et le repère $R_{3b}(C, \vec{x}_{3b}, \vec{y}_1, \vec{z}_{3b})$ au vérin **b** (tige **3b** et corps **4b**).

Les angles formés par ces vérins avec \vec{x}_1 sont notés :

$$\gamma_a = (\vec{z}_1, \vec{z}_{3a}) = (\vec{x}_1, \vec{x}_{3a}) \text{ et } \gamma_b = (\vec{z}_1, \vec{z}_{3b}) = (\vec{x}_1, \vec{x}_{3b}).$$

On donne :

$$\begin{aligned} \vec{OA} = \vec{CO} = e \vec{z}_2 \quad \vec{BA} = \lambda_a(t) \vec{x}_{3a} \quad \vec{DC} = \lambda_b(t) \vec{x}_{3b} \\ \vec{OB} = -L\vec{x}_1 + d\vec{z}_1 \quad \text{et} \quad \vec{OD} = -L\vec{x}_1 - d\vec{z}_1. \end{aligned}$$

Question 5. Par fermeture géométrique, déterminer une équation donnant l'évolution de λ_a en fonction de β et une autre équation reliant l'angle γ_a en fonction β .

A partir des résultats de la question précédente, l'évolution de l'angle γ_a en fonction de β est tracée.

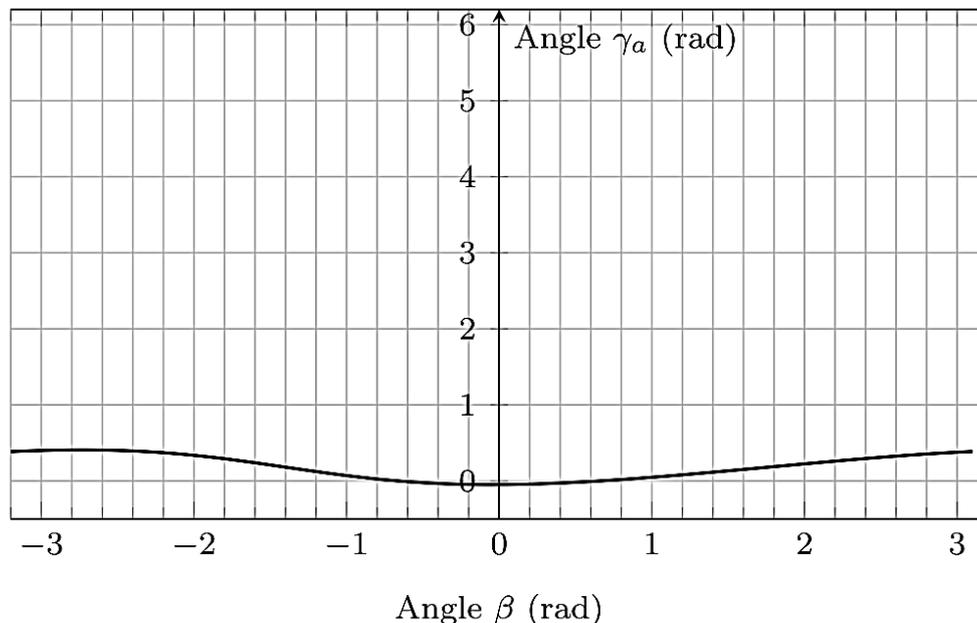


Figure 9 : Evolution de l'angle γ_a en fonction de β

Question 6. A partir de la courbe **Figure 9**, formuler une hypothèse sur les angles γ_a et γ_b sachant que l'angle β varie entre $\pm 45^\circ = \pm 0,7 \text{ rad}$.

On adopte les notations suivantes $\Omega_\alpha(p)$ et $\Omega_\beta(p)$ transformées de Laplace respectives des vitesses angulaires : $\omega_\alpha(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}$ et $\omega_\beta(t) = \frac{d\beta(t)}{dt}$.

En utilisant les équations simplifiées obtenues par l'étude géométrique et le principe de conservation de la masse pour un fluide compressible, on peut établir l'équation suivante reliant le débit volumique total $q(t)$, la vitesse angulaire $\omega_\beta(t)$ et le couple $C_h(t)$:

$$q(t) = S \cdot e \frac{d\beta(t)}{dt} + \frac{V_0}{2.B.S.e} \frac{dC_h(t)}{dt} \quad \text{(eq 3)}$$

où S représente la section utile équivalente, aux 2 vérins identiques **a** et **b**, sur laquelle s'exercent les actions mécaniques de pression du fluide, V_0 est le demi volume équivalent aux 2 vérins et B le coefficient de compressibilité isotherme de l'huile.

Le servo-distributeur fournit un débit $q(t)$ proportionnel au courant $i(t)$ tel que $q(t) = K_{sv} i(t)$.

On rappelle que les équations qui caractérisent le bateau et le stabilisateur gyroscopique sont les suivantes :

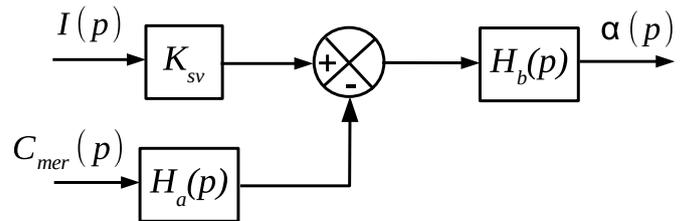
$$I_g \frac{d^2\beta(t)}{dt^2} = C_h(t) + C_3\omega_m \frac{d\alpha(t)}{dt} \quad \text{(eq 1)}$$

$$I_b \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + f_b \frac{d\alpha(t)}{dt} + k_b\alpha(t) = C_{mer}(t) - C_3\omega_m \frac{d\beta(t)}{dt} \quad \text{(eq 2)}$$

A l'aide des équations (eq 1, eq 2, eq 3) et en supposant les conditions initiales nulles, on peut donner les fonctions de transfert H_1 à H_6 du schéma-blocs du document-réponse.

Question 7. A l'aide de l'équation eq 3 et en supposant les conditions initiales nulles, donner les fonctions de transfert H_1 et H_6 du schéma-blocs du document-réponse.

Question 8. Montrer alors que ce schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante où l'on précisera l'expression de H_a et H_b en fonction de H_1 à H_6 uniquement. (Ne surtout pas remplacer par les expressions trouvées à la question précédente).



On donne, dans le document-réponse, la réponse indicielle $\alpha(t)$ pour un entrée de $i(t) = 1 A$ avec $C_{mer} = 0$.

Question 9. Proposer un modèle de comportement de la chaîne d'action (fonction de transfert $G(p) = K_{sv}H_b(p)$) à partir de la réponse indicielle. Identifier les valeurs numériques des paramètres caractéristiques intervenant dans la fonction de transfert. Vous justifierez votre réponse en reportant les tracés nécessaires sur le document-réponse. On pourra utiliser les abaques donnés en annexe 4.

3. Performances du système de contrôle

Dans cette partie, un modèle complet de l'asservissement en roulis du bateau est construit afin d'étudier les performances. Le choix des correcteurs et l'optimisation de leurs paramètres de réglage vis-à-vis des performances attendues permettent de conclure sur les capacités de stabilisation du dispositif.

L'asservissement de position peut être représenté par le schéma-blocs suivant :

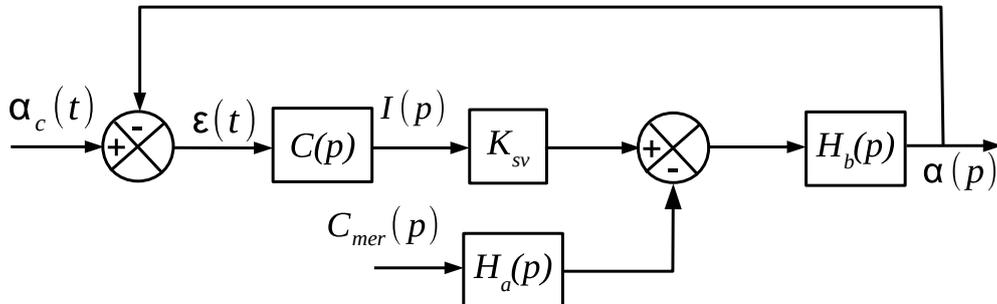


Figure 10 : Schéma-blocs de l'asservissement en roulis du bateau

Les performances attendues de l'asservissement sont les suivantes :

Performances	Critères
Stabilité	Marge de phase = 60° Marge de gain > 0dB
Précision	Erreur statique (régime stationnaire) ≤ 5% pour une consigne α_c en échelon
Rapidité	Temps de réponse à 5% < 5 s Bande passante à 0dB de la FTBO : [0 ; $\omega_{0dB} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$]
Amortissement	Premier dépassement $D_1(\%) < 20\%$

La fonction de transfert $H_a(p)$ s'écrit sous la forme $H_a(p) = K_a \left(1 + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)$. Quelles que soient les valeurs trouvées à la question précédente, on adopte pour fonction de transfert : $G(p) = K_{sv} \cdot H_b(p) = K_{sv} \cdot \frac{K_b}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec $K_{sv} \cdot K_b = 2 \text{ rad. A}^{-1}$.

Dans un premier temps, un correcteur proportionnel $C(p) = K_p$ est envisagé.

Question 10. Rappeler le théorème de la valeur finale. Déterminer l'écart statique associée à une entrée $\alpha_c(t)$ en échelon d'amplitude α_{c0} (avec $C_{mer} = 0$). En déduire la valeur minimale de K_p assurant le critère de précision.

Par une étude temporelle obtenue avec un correcteur proportionnel, on observe que la rapidité et l'amortissement ne sont pas conformes aux valeurs définies par le cahier des charges.

On choisit d'utiliser alors un correcteur proportionnel à avance de phase de la forme :

$$C(p) = \frac{K_p(1+arp)}{1+\tau p} \text{ avec } a > 1.$$

Le réglage de ce correcteur doit permettre de respecter simultanément le critère de rapidité ($\omega_{0dB} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$) et une marge de phase de 60°.

Question 11. Donner l'allure du diagramme de Bode associé à la fonction de transfert du correcteur seul. Par quelle méthode obtenir alors celui de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée ?

Les diagrammes de Bode de la $FTBO(p) = C(p) K_{sv} H_b(p)$ sont tracés sur le document-réponse pour $K_p = 1 A.s^{-1}$ avec $a = 14$ et $\tau = 0,027s$.

Question 12. Déterminer la valeur de K_p permettant de respecter le critère de bande passante à 0 dB (on laissera éventuellement la valeur de K_p sous la forme 10^x). Vérifier que le critère de marge de phase est également respecté. Les tracés seront reportés sur le document-réponse.

Le moment exercé par la mer sur le bateau peut être modélisé par une somme de fonctions sinusoïdales de différentes pulsations comprises généralement entre 0 et 10 rad.s^{-1} . On suppose donc pour simplifier, des vagues régulières dont le couple exercé sur le bateau est de la forme : $C_{mer}(t) = C_0 \sin(\omega t)$.

On donne les diagrammes de Bode de la fonction $H_r(p) = \frac{\alpha(p)}{C_{mer}(p)}$ après réglage du correcteur.

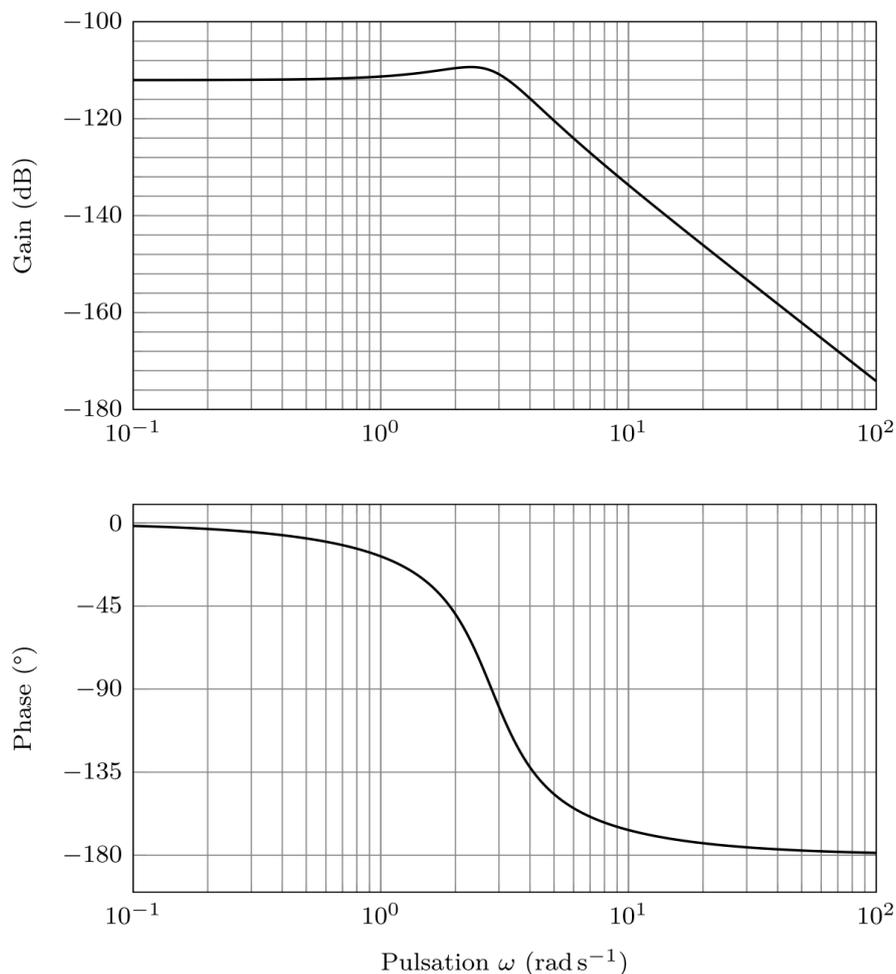


Figure 11 : Diagrammes de Bode de la fonction de transfert $H_r(p)$
Le module $|H_r(j \omega)|$ est en $\text{rad. N}^{-1} . \text{m}^{-1}$

Question 13. Donner la forme de l'expression de l'angle en régime établi $\alpha(t)$ en réponse à cette entrée sinusoïdale $C_{mer}(t)$. Compléter le tableau du document-réponse en précisant les valeurs numériques du rapport d'amplitudes α/C_{mer} (sous la forme 10^x) et du déphasage dans le cas d'un bateau avec stabilisation gyroscopique pour $\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$. Conclure sur l'intérêt de ce système avec stabilisation gyroscopique.

La réponse temporelle du système est obtenue pour une entrée sinusoïdale de moment C_{mer} . Au bout de 40 s, le système de stabilisation est activé.

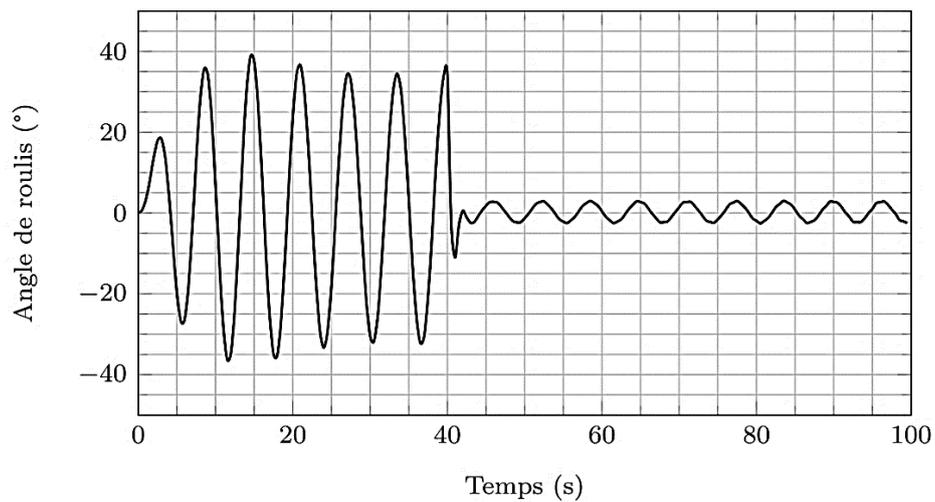


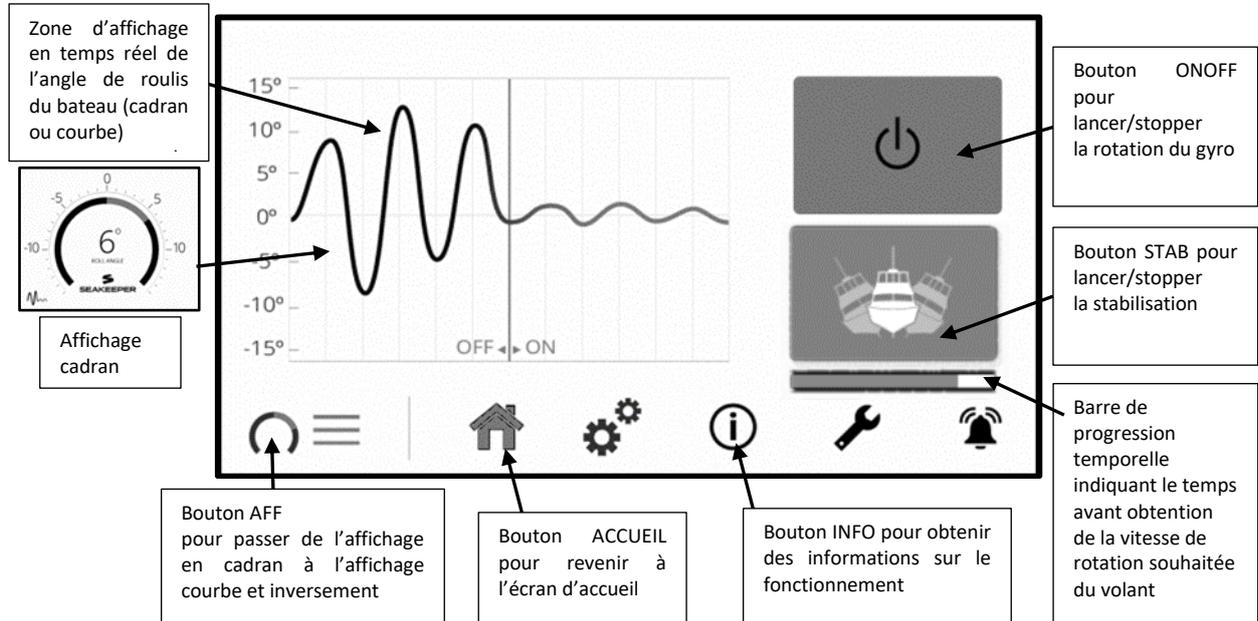
Figure 12 : Angle de roulis (en °) en fonction du temps (en s)

Question 14. Préciser la pulsation du moment C_{mer} notée ω_{mer} utilisée dans la simulation temporelle. Préciser l'atténuation apportée par le système de stabilisation (rapport de l'amplitude de l'angle de roulis avec stabilisation sur l'amplitude sans stabilisation) à partir de la réponse temporelle (cf. **Figure 12**).

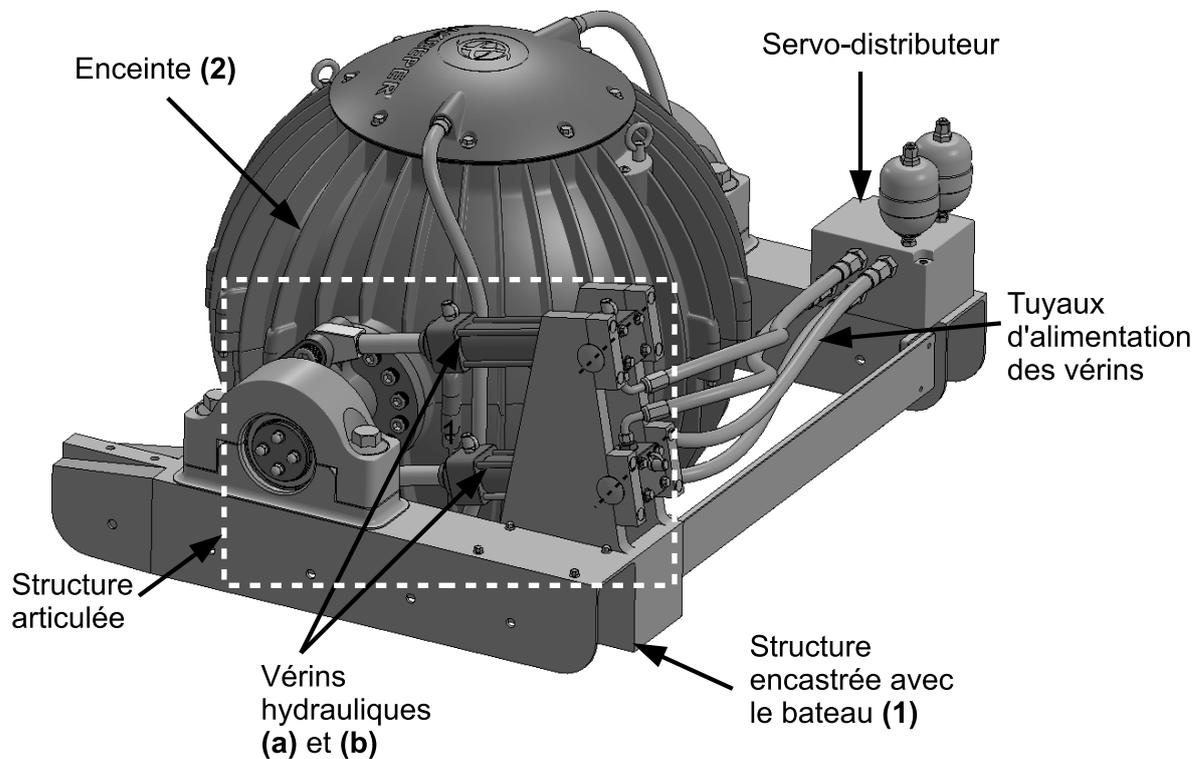
FIN

Annexes

Annexe 1 : Ecran du pupitre de contrôle



Annexe 2 : Principaux constituants du régulateur hydraulique



Annexe 4 : Abaques d'identification d'un système du second ordre

