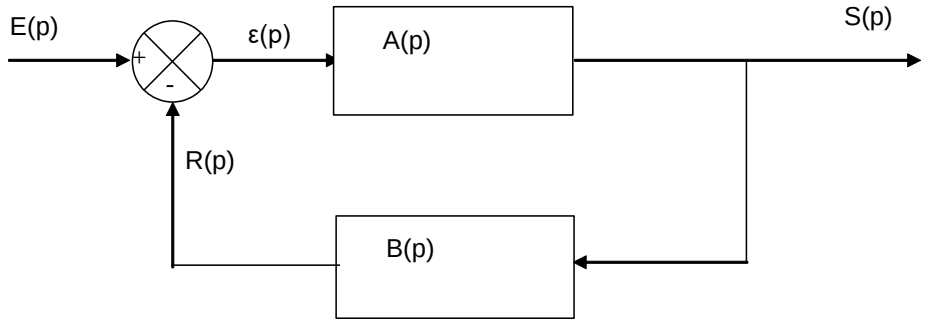
Précision d'un asservissement

1. Définitions

Considérons le système asservi ci-dessous :



Ce système asservi est conçu afin que la sortie s(t) évolue, en fonction du temps, conformément à la consigne e(t).

Afin d'évaluer la précision de ce système, il faut définir à tout instant l'écart : $\varepsilon(t) = L^{-1}\{\varepsilon(p)\} = L^{-1}\{E(p) - B(p).S(p)\} = L^{-1}\{E(p)\} - L^{-1}\{B(p).S(p)\} = e(t) - r(t)$.

L'écart $\boldsymbol{\varepsilon(t)}$ est dû à une entrée e(t), qui peut varier au cours du temps, et à des perturbations qui peuvent se superposer au signal utile du système correspondant au schéma bloc ci-dessous. Il faut appliquer le principe de superposition pour sommer les écarts dus aux variations de la consigne et aux perturbations.

L'écart $\varepsilon(t)$ quand **la consigne e(t) varie au cours du temps**, s'appelle **écart en poursuite**. L'écart $\varepsilon(t)$ quand il y a **existence de perturbations**, s'appelle **écart en régulation**.

Le schéma-bloc ci-dessus nous permet d'écrire : $\varepsilon(p) = E(p) - B(p).S(p)$ or $S(p) = A(p).\varepsilon(p)$
Nous obtenons donc : $\varepsilon(p) = E(p) - A(p).B(p).\varepsilon(p)$.

Donc : $$\boldsymbol{\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + A(p).B(p)} = \frac{E(p)}{1 + H_o(p)} = \frac{E(p)}{1 + F.T.B.O.(p)}}$$

L'écart ne dépend que de la consigne et de la fonction de transfert en boucle ouverte (F.T.B.O.).
L'écart $\boldsymbol{\varepsilon(t)}$ peut se définir :

- à tout instant, certains l'appellent alors écart dynamique et le notent $\boldsymbol{\varepsilon_d}$,
- pendant la réponse permanente, il est alors appelé écart permanent $\boldsymbol{\varepsilon_s}$ avec $\boldsymbol{\varepsilon_s = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t)}$.

L'écart permanent est quelquefois appelé **écart statique** mais certains n'utilisent cette terminologie que pour des entrées constantes ou des perturbations constantes.
Parler de précision d'un système asservi n'a de sens que si ce système est stable.
Les spécifications du cahier des charges indiquent généralement au concepteur une condition exprimée sous forme d'écart maximal admissible en fonction du signal de consigne, voire même du type de perturbations associées.

2. ÉCART EN POURSUITE

L'écart pendant la réponse permanente est la valeur de $\varepsilon(t)$ quand t tend vers l'infini.

Donc : $$\varepsilon_s = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t)$$

Pour obtenir ε_S, il faut appliquer le **théorème de la valeur finale** : $\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim_{p\to 0}p\varepsilon(p)$. Comme $\varepsilon(p)=\dfrac{E(p)}{1+F.T.B.O.(p)}$, alors : $\boldsymbol{\varepsilon_S=\lim_{p\to 0}p\dfrac{E(p)}{1+H_O(p)}=\lim_{p\to 0}p\dfrac{E(p)}{1+F.T.B.O.(p)}}$

Or la fonction de transfert en boucle ouverte peut s'écrire sous la forme $H_O(p)=\dfrac{K}{p^\alpha}.\dfrac{1+b_1p+...}{1+a_1p+...}$.

α correspond à la **classe du système** ou encore au nombre d'intégrateurs présents dans la boucle ouverte et K est le gain statique de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Donc : $\varepsilon_S=\lim_{p\to 0}p\dfrac{E(p)}{1+\dfrac{K}{p^\alpha}.\dfrac{1+b_1p+...}{1+a_1p+...}}=\lim_{p\to 0}p\dfrac{E(p)}{1+\dfrac{K}{p^\alpha}}$

$$\boldsymbol{\varepsilon_S=\lim_{p\to 0}p\frac{E(p)}{1+\dfrac{K}{p^\alpha}}}$$

Afin que l'écart pendant la réponse permanente soit faible, il faut que $1+\dfrac{K}{p^\alpha}$ donc $\dfrac{K}{p^\alpha}$ soit grand quand p tend vers zéro. Donc il faut que K et α soient grands, ce qui est contradictoire avec les conditions de stabilité d'un système asservi.

Les conditions de stabilité et de précision sont donc contradictoires. On parle de dilemme précision/stabilité.

2.1 Écart indiciel ou écart de position

Cet écart existe lorsque l'entrée e(t) est un échelon. Si e(t) = A alors $E(p)=\dfrac{A}{p}$. Dans ce cas, nous avons :

$\varepsilon_S=\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim_{p\to 0}p\dfrac{\dfrac{A}{p}}{1+\dfrac{K}{p^\alpha}}$. Donc : $\boldsymbol{\varepsilon_S=\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim_{p\to 0}\dfrac{A}{1+\dfrac{K}{p^\alpha}}}$

Nous allons étudier l'évolution de cet écart en fonction de la classe du système, c'est-à-dire en fonction de α :

- si $\boldsymbol{\alpha=0}$ alors $\boldsymbol{\lim_{p\to 0}\dfrac{A}{1+\dfrac{K}{p^\alpha}}=\dfrac{A}{1+K}}$, donc $\boldsymbol{\varepsilon_S=\dfrac{A}{1+K}}$,
- si $\boldsymbol{\alpha\geq 1}$ alors $\boldsymbol{\lim_{p\to 0}\dfrac{A}{1+\dfrac{K}{p^\alpha}}=0}$, donc $\boldsymbol{\varepsilon_S=0}$.

2.2 Écart de traînage ou écart en vitesse

Cet écart existe lorsque l'entrée e(t) est une rampe. Si e(t) = at pour $t \rangle 0$ alors $E(p) = \frac{a}{p^2}$. Dans ce cas, nous avons : $\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p \frac{\frac{a}{p^2}}{1+\frac{K}{p^\alpha}}$. Donc : $\boldsymbol{\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} \frac{\frac{a}{p}}{1+\frac{K}{p^\alpha}}}$

Nous allons étudier l'évolution de cet écart en fonction de la classe du système, c'est-à-dire en fonction de α :

- si $\boldsymbol{\alpha = 0}$ alors $\boldsymbol{\lim_{p\to 0} \frac{\frac{a}{p}}{1+\frac{K}{p^\alpha}}}$ tend vers l'infini, donc $\boldsymbol{\varepsilon_s \to \infty}$,
- si $\boldsymbol{\alpha = 1}$ alors $\boldsymbol{\lim_{p\to 0} \frac{\frac{a}{p}}{1+\frac{K}{p^\alpha}} = \frac{a}{K}}$, donc $\boldsymbol{\varepsilon_s = \frac{a}{K}}$,
- si $\alpha > 1$ alors $\boldsymbol{\lim_{p\to 0} \frac{\frac{a}{p}}{1+\frac{K}{p^\alpha}} = 0}$, donc $\boldsymbol{\varepsilon_s = 0}$.

Donc si la boucle comporte au moins deux intégrateurs, l'écart de traînage est nul.

Écart en accélération

Cet écart existe lorsque l'entrée e(t) est «parabolique». Si $e(t) = a\frac{t^2}{2}$ pour $t \rangle 0$ alors $E(p) = \frac{a}{p^3}$. Dans ce cas, nous avons : $\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p \frac{\frac{a}{p^3}}{1+\frac{K}{p^\alpha}}$. Donc : $\boldsymbol{\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} \frac{\frac{a}{p^2}}{1+\frac{K}{p^\alpha}}}$

Nous allons étudier l'évolution de cet écart en fonction de la classe du système, c'est-à-dire en fonction de α :

- si $\boldsymbol{\alpha = 0}$ alors $\boldsymbol{\lim_{p\to 0} \frac{\frac{a}{p^2}}{1+\frac{K}{p^\alpha}}}$ tend vers l'infini, donc $\boldsymbol{\varepsilon_s \to \infty}$,
- si $\boldsymbol{\alpha = 1}$ alors $\boldsymbol{\lim_{p\to 0} \frac{\frac{a}{p^2}}{1+\frac{K}{p^\alpha}}}$ tend vers l'infini, donc $\boldsymbol{\varepsilon_s \to \infty}$,

• si $\alpha = 2$ alors $\lim\limits_{p \to 0} \dfrac{\dfrac{a}{p^2}}{1 + \dfrac{K}{p^\alpha}} = \dfrac{a}{K}$, donc $\varepsilon_s = \dfrac{a}{K}$.

• si $\alpha \geq 3$ alors $\lim\limits_{p \to 0} \dfrac{\dfrac{a}{p^2}}{1 + \dfrac{K}{p^\alpha}} = 0$, donc $\varepsilon_s = 0$.

Donc si la boucle comporte au moins trois intégrateurs, l'écart en accélération est nul.

2.3 Tableau récapitulatif

Les résultats précédents peuvent se mettre sous la forme d'un tableau :

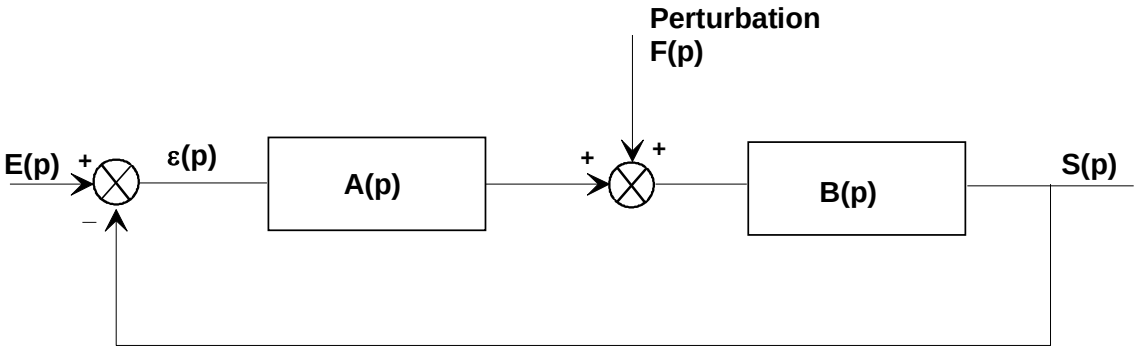
	Classe 0 $\alpha = 0$	Classe 1 $\alpha = 1$	Classe 2 $\alpha = 2$	Classe n $\alpha \geq 3$
Écart de position	$\dfrac{A}{1+K}$	0	0	0
Écart de traînage	∞	$\dfrac{a}{K}$	0	0
Écart en accélération	∞	∞	$\dfrac{a}{K}$	0

Donc pour diminuer l'écart pendant la réponse permanente, il faut augmenter :
• le gain statique,
• la classe α du système, c'est-à-dire le nombre d'intégrateurs présents dans la boucle. L'écart est nul, pour une entrée de la forme at^n, si la boucle comporte au moins n + 1 intégrateurs.

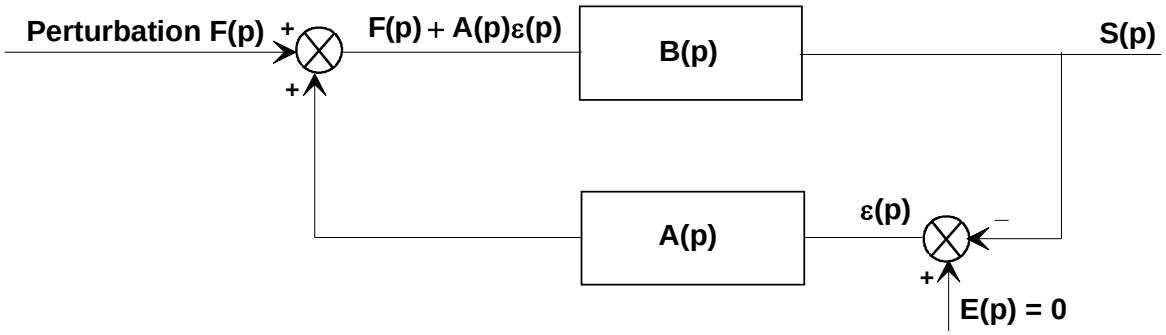
Remarque :
La classe α d'un système correspond au nombre d'intégrateurs présents dans la boucle et **peut être déterminée directement à partir de l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte**.

3. ECART EN REGULATION

Les écarts déterminés précédemment ne prennent pas en compte les perturbations. Afin d'étudier l'influence des perturbations, considérons le schéma-bloc d'un système à retour unitaire :



Le principe de superposition permet d'étudier l'influence de la perturbation seule en posant E(p) = 0. Le schéma-bloc peut alors s'interpréter de la manière suivante :



La fonction de transfert en régulation est définie par le rapport $\frac{-\varepsilon(p)}{F(p)}$.

Nous avons : $S(p) = (F(p) + A(p).\varepsilon(p)).B(p)$ avec $\varepsilon(p) = -S(p)$. Nous obtenons donc :

$-\varepsilon(p) = F(p).B(p) + A(p).\varepsilon(p).B(p)$, soit $\frac{-\varepsilon(p)}{F(p)} = \frac{B(p)}{1 + A(p).B(p)}$. D'où :

$$\frac{-\varepsilon(p)}{F(p)} = \frac{B(p)}{1 + A(p).B(p)} = \frac{B(p)}{1 + H_o(p)} = \frac{1}{A(p)}.\frac{H_o(p)}{1 + H_o(p)} = \frac{1}{A(p)}.H_f(p)$$

Un système asservi performant doit être précis, donc $H_f(p)$ doit tendre vers 1. Un système asservi doit être insensible aux perturbations, donc $\frac{H_f(p)}{A(p)}$ doit tendre vers zéro. Ces deux contraintes ne sont pas incompatibles, elles imposent de choisir A(p) et B(p), donc la fonction de transfert en boucle ouverte $H_o(p)$, les plus grands possibles, ce qui malheureusement ne correspond pas aux impératifs dictés par les contraintes de stabilité .

L'écart dû à une perturbation s'obtient donc par la relation : $\boxed{\varepsilon(p) = -\frac{F(p)}{A(p)}.\frac{H_o(p)}{1 + H_o(p)}}$

Calcul de la valeur de l'écart dû à la perturbation seule

L'écart ε va être calculé au moyen du théorème de la valeur finale : $\varepsilon = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p\varepsilon(p)$. D'après la relation ci-dessus, nous pouvons écrire :

$$\varepsilon = \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{-F(p)}{A(p)}.H_f(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{-F(p)}{A(p)}.\frac{H_o(p)}{1+H_o(p)}.$$

Nous savons que la fonction de transfert en boucle ouverte peut se mettre sous la forme $H_o(p) = \frac{K}{p^\alpha}.\frac{1+b_1p+...}{1+a_1p+...}$. Donc : $\varepsilon = \lim_{p\to 0} p\frac{-F(p)}{A(p)}.\frac{\frac{K}{p^\alpha}.\frac{1+b_1p+...}{1+a_1p+...}}{1+\frac{K}{p^\alpha}.\frac{1+b_1p+...}{1+a_1p+...}} = \lim_{p\to 0} p\frac{-F(p)}{A(p)}.\frac{\frac{K}{p^\alpha}}{1+\frac{K}{p^\alpha}}$.

$$\varepsilon = \lim_{p\to 0} p\frac{-F(p)}{A(p)}.\frac{\frac{K}{p^\alpha}}{1+\frac{K}{p^\alpha}} = \lim_{p\to 0} p\frac{-F(p)}{A(p)}.\frac{K}{K+p^\alpha}$$

Donc pour que l'effet d'une perturbation soit nul, il faut que :

$$\boldsymbol{\lim_{p\to 0} p\frac{-F(p)}{A(p)}.\frac{\frac{K}{p^\alpha}}{1+\frac{K}{p^\alpha}} = \lim_{p\to 0} p\frac{-F(p)}{A(p)}.\frac{K}{K+p^\alpha} = 0}$$

Premier cas

La perturbation est constante donc $f(t) = f_0$. Dans ce cas $F(p) = \frac{F_0}{p}$. Nous avons donc :

$$\varepsilon = \lim_{p\to 0} p\frac{-F(p)}{A(p)}.\frac{\frac{K}{p^\alpha}}{1+\frac{K}{p^\alpha}} = \lim_{p\to 0} p\frac{-\frac{F_0}{p}}{A(p)}.\frac{K}{K+p^\alpha} = \lim_{p\to 0}\frac{-F_0}{A(p)}.\frac{K}{K+p^\alpha}. \qquad \boldsymbol{\varepsilon = \lim_{p\to 0}\frac{-F_0}{A(p)}.\frac{K}{K+p^\alpha}}$$

L'effet de la perturbation est nul si $\boldsymbol{\lim_{p\to 0}\frac{-F_0}{A(p)}.\frac{K}{K+p^\alpha} = 0}$ donc si A(p) est de la forme $\boldsymbol{\frac{\xi}{p}}$. Il faut donc que A(p) comporte au moins un intégrateur.

Deuxième cas

La perturbation est une rampe donc $f(t) = f_0 t$. Dans ce cas $F(p) = \frac{F_0}{p^2}$. Nous avons donc :

$$\varepsilon = \lim_{p\to 0} p\frac{-F(p)}{A(p)}.\frac{\frac{K}{p^\alpha}}{1+\frac{K}{p^\alpha}} = \lim_{p\to 0} p\frac{-\frac{F_0}{p^2}}{A(p)}.\frac{K}{K+p^\alpha} = \lim_{p\to 0}\frac{-F_0}{pA(p)}.\frac{K}{K+p^\alpha}. \qquad \boldsymbol{\varepsilon = \lim_{p\to 0}\frac{-F_0}{pA(p)}.\frac{K}{K+p^\alpha}}$$

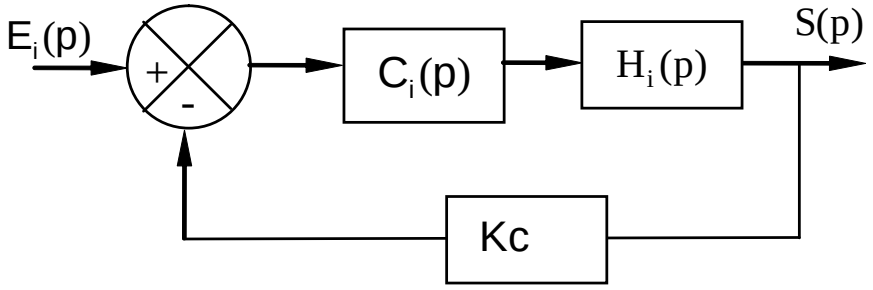
L'effet de la perturbation est nul si $\boldsymbol{\lim_{p\to 0}\frac{-F_0}{pA(p)}.\frac{K}{K+p^\alpha} = 0}$ donc si A(p) est de la forme $\boldsymbol{\frac{\xi}{p^2}}$. Il faut donc que A(p) comporte au moins deux intégrateurs.

Conclusion

Une perturbation de la forme $\boldsymbol{f_0 t^n}$ voit ses effets annulés par n + 1 intégrateurs placés en amont de son point d'entrée dans la boucle.

EXERCICES Précision

1. *Calculer l'écart en régime permanent caractérisant la précision d'un système modélisé par un schéma bloc pour une entrée donnée :*



a. $H_1(p) = \dfrac{2}{1+0,1.p+3p^2}$; $C_1(p) = K$; $e_1(t) = 1$

(correction proportionnelle P)

b. $H_2(p) = \dfrac{2}{1+0,1.p}$; $C_2(p) = K\left(1+\dfrac{1}{Tp}\right)$; $e_2(t) = 3t$

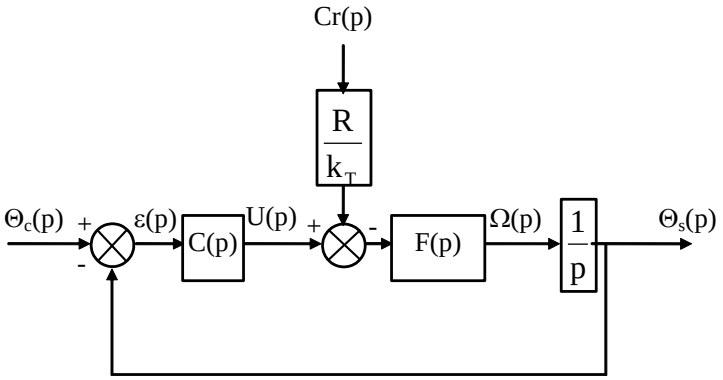
(correction proportionnelle et intégrale PI)

c. $H_3(p) = \dfrac{2}{p\left(1+2.p+3p^2\right)}$ $C_3(p) = K\left(1+\dfrac{1}{Ti.p}+Td.p\right)$; $e_3(t) = \left|\begin{array}{l} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{array}\right.$

(correction proportionnelle, intégrale et dérivée PID)

2. MAXPID – CORRECTION PROPORTIONNELLE INTEGRALE

Le système de positionnement angulaire Maxpid peut-être représenté par le schéma bloc suivant :



Avec :

- $F(p) = \dfrac{K}{1+T.p}$ est la fonction de transfert du modèle de l'ensemble moteur + mécanisme : modèle d'expérience : $K = 6{,}28$ deg.V^{-1}.s^{-1} et $T = 0{,}0354$ s.
- C(p) la fonction de transfert du correcteur
- $C_r(p)$le couple résistant de l'ensemble ramené à l'arbre moteur (R et k_T sont des constantes du moteur à courant continu) $k_T = 0{,}0525$ Nm/A ; R = 2,01 Ω.

Correction proportionnelle : $C(p) = \dfrac{K_p}{20}$ (en V/deg)

Correction intégrale $C(p) = \dfrac{K_p}{20} + \dfrac{K_i}{p}$

1. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO1}(p)$ en correction proportionnelle.

2. Déterminer l'écart statique en poursuite d'une consigne échelon unitaire, puis rampe unitaire, puis rampe parabolique t².

3. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO2}(p)$ en correction intégrale. Donner la condition sur Kp et Ki garantissant la stabilité théorique de l'asservissement.

4. Pour Ti=0,02s déterminer la valeur de Kp permettant de respecter des marge respectives de gain et de phase de 3dB et 30°.

5. Déterminer les nouveaux écarts statiques en poursuite d'une consigne échelon unitaire, puis rampe unitaire, puis rampe parabolique t².

6. Déterminer l'écart statique en régulation généré par une perturbation constante cr(t)=0,02Nm ;