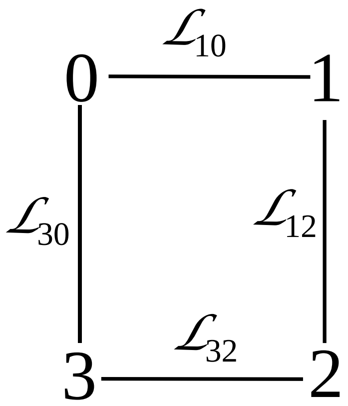
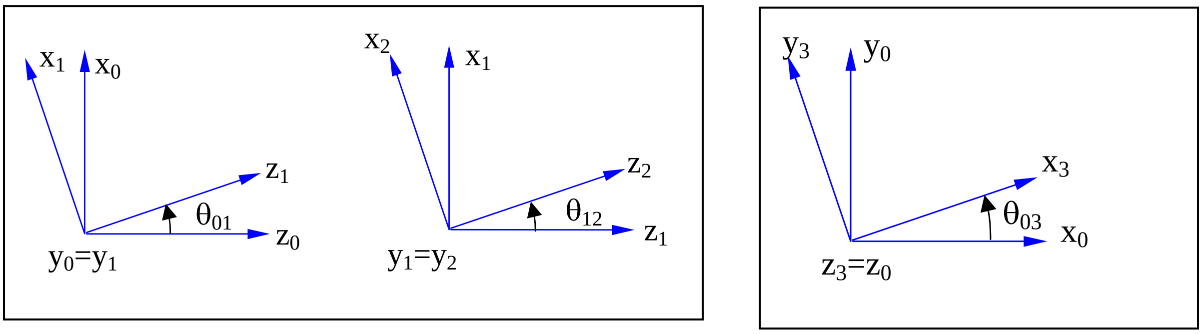
MALAXEUR corrigé

Question 1 : Identifier clairement les liaisons de ce mécanisme en indiquant leurs caractéristiques. Proposer un graphe de liaisons.

$\mathcal{L}_{10}$: Pivot d'axe $(A, \vec{y}_0)$
$\mathcal{L}_{21}$: Pivot glissant d'axe $(B, \vec{y}_0)$
$\mathcal{L}_{32}$: Rotule de centre C
$\mathcal{L}_{30}$: Pivot glissant d'axe $(D, \vec{z}_0)$



Question 2 : Tracer les figures de calcul du mécanisme et exprimer les vecteurs taux de rotation correspondants $\vec{\Omega}(S_i / S_j)$ en fonction de $\dot{\theta}_{ji}$.



$\boxed{\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\theta}_{01}\vec{y}_1}$

$\boxed{\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\theta}_{12}\vec{y}_1}$

$\boxed{\vec{\Omega}(3/0) = \dot{\theta}_{03}\vec{z}_0}$

1.1. Analyse géométrique

Question 3 : A l'aide d'une fermeture géométrique, exprimer h, λ et $\tan\theta_{03}$ **en fonction de** R, L, d et θ_{01} **.**

$$\begin{array}{ccccccccc} \overrightarrow{AB} & + & \overrightarrow{BC} & + & \overrightarrow{CD} & + & \overrightarrow{DA} & = & \vec{0} \\ R\vec{z}_1 & + & \lambda\vec{y}_0 & + & L\vec{y}_3 & - & h\vec{z}_0 - d\vec{y}_0 & = & \vec{0} \end{array} \quad (1)$$

Par projection de (1) sur $\mathcal{R}(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, on obtient le système d'équations suivantes :

$$\begin{array}{l} (1).\vec{x}_0 \\ (1).\vec{y}_0 \\ (1).\vec{z}_0 \end{array} \begin{cases} R\sin\theta_{01} & & & - L\sin\theta_{03} & = 0 \\ & \lambda & - d & + L\cos\theta_{03} & = 0 \\ R\cos\theta_{01} & & - h & & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L\sin\theta_{03} = R\sin\theta_{01} \\ L\cos\theta_{03} = d - \lambda \\ h = R\cos\theta_{01} \end{cases}$$

et on utilisant sin²+cos²=1 et sin/cos=tan

Finalement, il vient (si $R \le L$) :

$$\boxed{h(\theta_{01}) = R\cos\theta_{01}} \qquad \boxed{\lambda(\theta_{01}) = d - L\sqrt{1-\frac{R^2}{L^2}\sin^2\theta_{01}}} \qquad \boxed{\tan\theta_{03} = \frac{R\sin\theta_{01}}{L\sqrt{1-\frac{R^2}{L^2}\sin^2\theta_{01}}}}$$

Question 4 : Déterminer les relations cinématiques d'entrée sortie c'est à dire les relations liant les paramètres de sortie $\dot\theta_{03}$ et $\dot h$ au paramètre d'entrée $\dot\theta_{01}$.

Après calculs, on obtient :

$$\boxed{\dot\theta_{03} = \frac{R\dot\theta_{01}\cos\theta_{01}}{L\sqrt{1-\frac{R^2}{L^2}\sin^2\theta_{01}}}}$$

$$\boxed{\dot h(\theta_{01}) = -R\dot\theta_{01}\sin\theta_{01}}$$

1.2. Analyse cinématique

Question 5 : A l'aide des notations imposées au point 1.3, exprimer, dans la base B_0, les torseurs cinématiques des quatre liaisons L_{10}, L_{21} , L_{32} et L_{30} respectivement aux points A, B, C et D.

$$\left\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_0} \qquad \left\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{21} & v_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,B_0}$$

$$\left\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\right\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{32} & 0 \\ \beta_{32} & 0 \\ \gamma_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{C,B_0} \qquad \left\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_{30} & w_{30} \end{Bmatrix}_{D,B_0}$$

Question 6 : A l'aide d'une fermeture cinématique exprimée au point D dans la base B_0, exprimer $\beta_{21}, \alpha_{32}, \beta_{32}, \gamma_{32}, \gamma_{30}, v_{21}$ et w_{30} en fonction de h, β_{10}, L, R et θ_{01}. Combien vaut la mobilité m du mécanisme ? Justifier la présence d'une ou plusieurs mobilités internes.

$$\left\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\right\}_D + \left\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\right\}_D + \left\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\right\}_D - \left\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\right\}_D = \{0\}$$

$$\begin{cases} \vec\Omega(S_1/S_0) + \vec\Omega(S_2/S_1) + \vec\Omega(S_3/S_2) - \vec\Omega(S_3/S_0) = \vec 0 \\[2ex] \vec V(D,S_1/S_0) + \vec V(D,S_2/S_1) + \vec V(D,S_3/S_2) - \vec V(D,S_3/S_0) = \vec 0 \end{cases}$$

avec

$$\vec V(D,S_2/S_1) = \vec V(C,S_2/S_1) + \overrightarrow{DC} \wedge \vec\Omega(S_2/S_1)$$
$$\vec V(D,S_2/S_1) = v_{21}\vec y_0 - \left[L\vec y_3 - h\vec z_0\right] \wedge \beta_{21}\vec y_1$$
$$\vec V(D,S_2/S_1) = v_{21}\vec y_0 + L\beta_{21}\sin\theta_{03}\vec z_0 - h\beta_{21}\vec x_0$$

et

$$\vec V(D,S_3/S_2) = \vec V(C,S_3/S_2) + \overrightarrow{DC} \wedge \vec\Omega(S_3/S_2)$$
$$\vec V(D,S_3/S_2) = -\left[L\vec y_3 - d\vec z_0\right] \wedge \left[\alpha_{32}\vec x_0 + \beta_{32}\vec y_0 + \gamma_{32}\vec z_0\right]$$
$$\vec V(D,S_3/S_2) = -L\gamma_{32}\vec x_3 + \left[L\alpha_{32}\cos\theta_{03}\vec z_0 + L\beta_{32}\sin\theta_{03}\vec z_0\right] + \left[d\alpha_{32}\vec y_0 - d\beta_{32}\vec x_0\right]$$

$$
\begin{cases}
\alpha_{32} = 0 \\
\beta_{10} + \beta_{21} + \beta_{32} = 0 \\
\gamma_{32} - \gamma_{30} = 0 \\
-h\beta_{21} - L\gamma_{32}\cos\theta_{03} - d\beta_{32} = 0 \\
v_{21} - L\gamma_{32}\sin\theta_{03} + d\alpha_{32} = 0 \\
L\beta_{21}\sin\theta_{03} + L\alpha_{32}\cos\theta_{03} + L\beta_{32}\sin\theta_{03} - w_{30} = 0
\end{cases}
$$

Le bilan est le suivant :

Inconnues cinématiques	$\beta_{10}, \beta_{21}, \alpha_{32}, \beta_{32}, \gamma_{32}, \gamma_{30}, v_{21}$ et w_{30}	$N_c = 8$
Rang cinématique supposé		$r_c = 6$
Mobilité du mécanisme	$m = N_c - r_c$	$m = 2$
Paramètre d'entrée donné	β_{10}	
Paramètres cinématiques inconnus	$\beta_{21}, \alpha_{32}, \beta_{32}, \gamma_{32}, \gamma_{30}, v_{21}$ et w_{30}	

d'où

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\beta_{21} &= -\beta_{10} - \beta_{32} \\
\gamma_{32} &= \frac{h\beta_{10}}{d-\lambda} = \frac{R\beta_{10}\cos\theta_{01}}{L\sqrt{1-\frac{R^2}{L^2}\sin^2\theta_{01}}} \\
\gamma_{30} &= \gamma_{32} \\
v_{21} &= h\beta_{10}\tan\theta_{03} = \frac{R^2\beta_{10}\cos\theta_{01}\sin\theta_{01}}{L\sqrt{1-\frac{R^2}{L^2}\sin^2\theta_{01}}} \\
w_{30} &= -L\beta_{10}\sin\theta_{03} = -R\beta_{10}\sin\theta_{01}
\end{aligned}
}
$$

β_{32} et β_{10} restent inconnues et correspondent à une mobilité interne (rotation de 3 autour de son axe

Question 7 : Les expressions de γ_{30} et w_{30} sont-elles conformes aux résultats de la question 4 ?

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\gamma_{30} &= \frac{R\beta_{10}\cos\theta_{01}}{L\sqrt{1-\frac{R^2}{L^2}\sin^2\theta_{01}}} \\
w_{30} &= -R\beta_{10}\sin\theta_{01}
\end{aligned}
}
$$

On a $w_{30} = \vec{V}(D,3/0).\vec{z}_0$

$\vec{V}(D,3/0).\vec{z}_0 = \vec{V}(D/0).\vec{z}_0 - \vec{V}(D/3).\vec{z}_0 = -\vec{V}(D/3).\vec{z}_0$

$$\vec{V}(D/3).\vec{z}_0 = \left[\frac{d\overrightarrow{CD}}{dt}\right]_{B3}.\vec{z}_0 = \left[\frac{dh\vec{z}_0}{dt}\right]_{B3}.\vec{z}_0 = \dot{h}$$

donc $\boxed{w_{30} = \dot{h} = -R\dot{\theta}_{01}\sin\theta_{01}}$ C.Q.F.D.

On a $\boxed{\gamma_{30} = \vec{\Omega}(3/0).\vec{z}_0 = \dot{\theta}_{03} = \frac{R\dot{\theta}_{01}\cos\theta_{01}}{L\sqrt{1-\frac{R^2}{L^2}\sin^2\theta_{01}}}}$ C.Q.F.D.