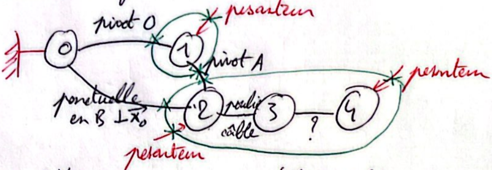
Machine d'essai de frottement

1.



2. $\{T_{0\to1}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_O$; $\{T_{0\to2}\} = \begin{Bmatrix} X_{02} & - \\ Y_{02} & - \\ \cancel{-} & 0 \end{Bmatrix}_B$ $X_{02}<0$ car $0 \to 2$

$\{T_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & - \\ Y_{12} & - \\ \cancel{-} & 0 \end{Bmatrix}_A$

3. P.F.S. appliqué à 1 en O :

$$\begin{cases} ① & 0 + X_{01} + X_{21} = 0 \\ ② & -m_1 g + Y_{01} + Y_{21} = 0 \\ ③ & 0 + 0 + a(Y_{21}\cos\alpha - X_{21}\sin\alpha) = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} X_{21} = -X_{12} \\ Y_{21} = -Y_{12} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{X_{21}}{Y_{21}} = \frac{1}{\tan\alpha} \ ; \ Y_{21} = X_{21}\tan\alpha \Rightarrow \vec{R}_{2\to1} = -\vec{R}_{0\to1} \,//\, (OA)$$

(théorème 1)

4. P.F.S. appliqué à 2+3+4 en A :

$$\begin{cases} ④ & 0 + X_{12} + X_{02} + 0 = 0 \\ ⑤ & -m_2 g + X_{12}\tan\alpha + Y_{02} - Mg = 0 \\ ⑥ & 0 + 0 + R\,Y_{02} - r\,Mg = 0 \end{cases}$$

car $\vec{M}(A, 0\to2) = \vec{M}(B, 0\to2) + \vec{AB} \wedge \vec{R}_{0\to2}$

$= \vec{0} + R\,\vec{x_0} \wedge (X_{02}\vec{x_0} + Y_{02}\vec{y_0})$

5. rupture de l'équilibre au début du glissement en B $\Rightarrow \vec{V}(B, 2/0) \neq \vec{0}$

lois de Coulomb :
$$\begin{cases} \dfrac{|X_{02}|}{|Y_{02}|} = f \\ \cancel{Y_{02}}.\vec{y_0} \wedge \vec{V}(B,2/0) = \vec{0} \\ \cancel{X_{02}}.\vec{x_0} \cdot \vec{V}(B,2/0) < 0 \end{cases} \Rightarrow Y_{02} < 0$$

or $X_{02} < 0 \Rightarrow X_{02} = +f \cdot Y_{02}$ ⑦

6. d'après les équations 4, 5, 6 et 7 :

$$X_{12} = -X_{02} \Rightarrow \begin{cases} -m_2 g - X_{02}\tan\alpha + Y_{02} - Mg = 0 \\ Y_{02} = \frac{r}{R} Mg \\ X_{02} = f\, Y_{02} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -m_2 g - f\,\frac{r}{R} Mg \tan\alpha + \frac{r}{R} Mg - Mg = 0$$

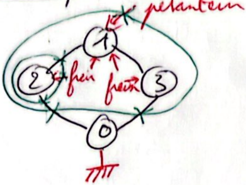
$$\Rightarrow \cancel{f = \frac{Mg\left(1-\frac{r}{R}\right) - m_2}{M\frac{r}{R}}}$$

$$\Rightarrow f = \frac{M\left(1-\frac{r}{R}\right) - m_2}{M\frac{r}{R}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f = \frac{M(R-r) - m_2 R}{M r}}$$

donc à une valeur de M correspondant à la limite du glissement, on obtient f.

Equilibre statique d'une voiture

1. 

2. $\{T_{0\to2}\} = \begin{Bmatrix} X_{02} & - \\ Y_{02} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_I$ $\quad Y_{02} > 0$ car $0 \to 2$

$\{T_{0\to3}\} = \begin{Bmatrix} X_{03} & - \\ Y_{03} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_J$ $\quad Y_{03} > 0$ car $0 \to 3$

$\{T_{pes\to1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ -Mg & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_G$

$\{T_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & - \\ Y_{12} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{O_2}$

$\{T_{1\to3}\} = \begin{Bmatrix} X_{13} & - \\ Y_{13} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{O_3}$

3. P.F.S. appliqué à 2 en O_2 :

$$\begin{cases} X_{02} + X_{12} = 0 \\ Y_{02} + Y_{12} = 0 \\ R.X_{02} + 0 = 0 \Rightarrow X_{02} = -X_{12} = 0 \end{cases} \quad \vec{R}_{0\to2} \,//\, \vec{y}$$

4. P.F.S. appliqué à 1+2+3 en I :

$$\begin{cases} 0 + 0 + 0 = 0 & (1) \\ Y_{02} + Y_{03} - Mg = 0 & (2) \\ 0 + e.Y_{03} - LMg = 0 & (3) \end{cases} \Rightarrow \boxed{Y_{03} = \frac{L}{e} Mg} \boxed{Y_{02} = \frac{e-L}{e} Mg}$$

5. pas de frein sur la roue avant 3 donc $X_{03} = 0$

Frein de parking sur 2 donc $X_{02} \neq 0$ possible

On reprend le P.F.S. de la question 4. en I :

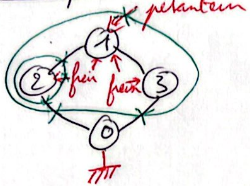
$$\begin{cases} X_{02} + 0 - Mg\sin\beta = 0 & (1) \\ Y_{02} + Y_{03} - Mg\cos\beta = 0 & (2) \\ 0 + eY_{03} + Mg(h\sin\beta - L\cos\beta) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\vec{M}(I, pes\to1) = \vec{M}(G, pes\to1) + \vec{IG} \wedge \left(-Mg(\cos\beta\,\vec{y} + \sin\beta\,\vec{x})\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -Mg\sin\beta \\ -Mg\cos\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equilibre statique d'une voiture

1.



2. $\{T_{0\to2}\} = \left\{\begin{array}{cc} X_{02} & - \\ Y_{02} & - \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_I$ $\quad Y_{02}>0$ car $0\to2$

$\{T_{0\to3}\} = \left\{\begin{array}{cc} X_{03} & - \\ Y_{03} & - \\ - & 0 \end{array}\right\}_J$ $\quad Y_{03}>0$ car $0\to3$

$\{T_{pes\to1}\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & - \\ -Mg & - \\ - & 0 \end{array}\right\}_G$

$\{T_{1\to2}\} = \left\{\begin{array}{cc} X_{12} & - \\ Y_{12} & - \\ - & 0 \end{array}\right\}_{O_2}$

$\{T_{1\to3}\} = \left\{\begin{array}{cc} X_{13} & - \\ Y_{13} & - \\ - & 0 \end{array}\right\}_{O_3}$

3. P.F.S. appliqué à 2 en O_2 :

$$\begin{cases} X_{02} + X_{12} = 0 \\ Y_{02} + Y_{12} = 0 \\ R.X_{02} + 0 = 0 \Rightarrow X_{02} = -X_{12} = 0 \end{cases} \qquad \vec{R}_{0\to2} \,//\, \vec{y}$$

4. P.F.S. appliqué à 1+2+3 en I :

$$\begin{cases} 0 + 0 + 0 = 0 & (1) \\ Y_{02} + Y_{03} - Mg = 0 & (2) \\ 0 + e.Y_{03} - LMg = 0 & (3) \end{cases} \Rightarrow \boxed{Y_{03} = \frac{L}{e}Mg} \; \boxed{Y_{02} = \frac{e-L}{e}Mg}$$

5. pas de frein sur la roue avant 3 donc $X_{03} = 0$

Frein de parking sur 2 donc $X_{02} \neq 0$ possible

On reprend le P.F.S. de la question 4. en I :

$$\begin{cases} X_{02} + 0 - Mg\sin\beta = 0 & (1) \\ Y_{02} + Y_{03} - Mg\cos\beta = 0 & (2) \\ 0 + eY_{03} + Mg(h\sin\beta - L\cos\beta) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\vec{M}(I, pes\to1) = \vec{M}(G, pes\to1) + \vec{IG} \wedge \left(-Mg(\cos\beta\,\vec{y} + \sin\beta\,\vec{x})\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -Mg\sin\beta \\ -Mg\cos\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'inclinaison maximale est atteinte à la limite du glissement, on applique alors les lois de Coulomb :

$$\vec{V}(I\,2/0) \neq \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} |X_{02}| = f\,|Y_{02}| \\ X_{02}\vec{x}_0 \wedge \vec{V}(I,2/0) = \vec{0} \\ X_{02}\vec{x}_0 \cdot \vec{V}(I,2/0) < 0 \Rightarrow X_{02} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_{02} = f \cdot Y_{02} \quad (4)$$

on obtient ainsi 1 système de 4 équations 1, 2, 3, 4 à 4 inconnues (3 inconnues "statiques" X_{02}, Y_{02}, Y_{03} et 1 inconnue géométrique β.

Ainsi $\quad X_{02} = Mg\sin\beta$

$$Y_{03} = -\frac{Mg}{e}(h\sin\beta - L\cos\beta)$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{Mg}\sin\beta}{f} - \frac{\cancel{Mg}}{e}(h\sin\beta - L\cos\beta) - \cancel{Mg}\cos\beta = 0$$

$$\Rightarrow \sin\beta\left(\frac{1}{f} - \frac{h}{e}\right) + \cos\beta\left(\frac{L}{e} - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\beta = -\frac{\frac{L}{e} - 1}{\frac{1}{f} - \frac{h}{e}}}$$

et $\boxed{C_{m2} = R \cdot X_{02}}$

$= 0{,}3 \cdot 1500 \cdot 9{,}81 \sin$

avec $\beta = \arctan(0{,}28$

$\boxed{C_{m2} = 1190\ N.m}$

<u>A.N.</u> : $\tan\beta = -\dfrac{\frac{1{,}8}{2{,}5} - 1}{\frac{1}{0{,}6} - \frac{0{,}6}{2{,}5}} = 0{,}28 = 28\%$

6. on peut donc se garer dans une pente allant jusque 28% donc oui pour San Francisco !