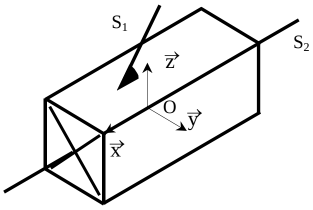
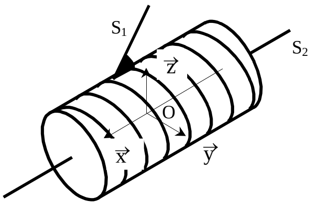
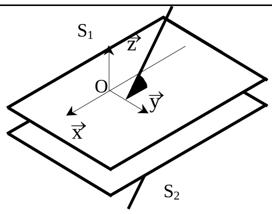
Questions de cours

Question 1 : Compléter les colonnes « nombre de degrés de liberté » et « torseur statique des actions mécaniques transmissibles » en précisant le(s) point(s) de réduction possible(s).

	Nombre de degrés de liberté	Schéma cinématique en perspective	Torseur statique des actions mécaniques transmissibles dans la base ($\vec{x},\vec{y},\vec{z}$)
Liaison glissière de direction $\vec{x}$	1		$\{T_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{\forall P \text{ dans } (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Liaison hélicoïdale d'axe $(0,\vec{x})$ de pas p	1		$\{T_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{\forall P \text{ dans } (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ avec $\lvert L_{12}\rvert = \frac{p}{2\pi}\lvert X_{12}\rvert$
Liaison appui plan de normale $\vec{z}$	3		$\{T_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P \text{ dans } (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Question 2 :
Donner la relation de dualité entre torseur cinématique et d'actions mécaniques transmissibles par une liaison parfaite en précisant les notations des torseurs utilisées. Expliquer ce qu'elle traduit en termes de puissances.

$$\boxed{L\omega_x + M\omega_y + N\omega_z + XV_x + YV_y + ZV_z = 0}$$

Cette propriété traduit le fait que la puissance P dissipée est nulle :

$$P = \vec{\Omega}_{k/i}.\vec{M}(O,S_i \to S_k) + \vec{V}(O \in S_k/S_i).\vec{R}(S_i \to S_k) = 0$$

Question 3 :
Qu'est-ce qu'un couple ? Ecrire le torseur sous la forme correspondante en spécifiant les définitions intégrales de ses éléments de réduction.

On appelle **couples**, les moments appliqués par un ensemble de forces de résultante (somme) nulle.
Un couple peut être représenté par un torseur-couple.

$$\{T(\vec{F}_i \to S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C} \end{Bmatrix}_{\forall P}$$

Equilibre d'un 2 roues à basse vitesse

Q1. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures à l'ensemble cycliste+vélo sous forme de torseurs simplifiés par utilisation de l'hypothèse de problème plan.

Sol 0 sur roue 1 : $\{T_{0\to1}\} = \begin{Bmatrix} X_I & - \\ Y_I & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{I \text{ dans } (\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$

Sol 0 sur roue 2 : $\{T_{0\to2}\} = \begin{Bmatrix} X_J & - \\ Y_J & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{J \text{ dans } (\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$

Pesanteur(terre) sur l'ensemble cycliste+vélo :

$$\{T_{pes\to E}\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ -Mg & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{G \text{ dans } (\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} = \begin{Bmatrix} -Mg\sin\alpha & - \\ -Mg\cos\alpha & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{G \text{ dans } (\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

Q2. Préciser les relations entre les composantes respectives de $\vec{R}_I$ et $\vec{R}_J$ dans le cas de l'adhérence. (loi de Coulomb)

D'après les lois de Coulomb dans le cas de l'adhérence, les résultantes des forces en I et J sont dans le cône de frottement strictement et :

$|X_I| < f.|Y_I|$ et $|X_J| < f.|Y_J|$

Q3. Ecrire le PFS appliqué à l'ensemble E, en J, en projection sur la base $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$.

$\{T_{0\to1}\}$	$+$	$\{T_{0\to2}\}$	$+$	$\{T_{pes\to E}\}$	$=$	$\{0\}$
X_I	$+$	X_J	$-$	$Mg\sin\alpha$	$=$	0
Y_I	$+$	Y_J	$-$	$Mg\cos\alpha$	$=$	0
$-L.Y_I$	$+$	0	$+$	$(L-x_G).Mg\cos\alpha$	$=$	0

Dans le cas de la montée lente sur une pente à 20% (sans usage des freins $X_J = 0$), pour laquelle $\sin(\alpha) = 0,2$ et $\cos(\alpha) = 0,98$:

Q4. Déterminer les valeurs des projections des forces de contact roue-sol. L'adhérence est-elle assurée ?

Dans l'hypothèse du non usage du frein avant, la roue avant n'étant soumise qu'à 2 glisseurs en J et B alors l'action du sol est un glisseur dont l'axe central est parallèle à $\vec{y}_1$ et on a bien $X_J = 0$.
Dans ce cas le problème est isostatique (3 équations, 3 inconnues) et on le résout pour trouver :

$$X_I = Mg\sin\alpha$$

$$Y_I = \frac{(L-x_G)}{L}.Mg\cos\alpha$$

$$Y_J = \frac{x_G}{L}.Mg\cos\alpha$$

Pour l'adhérence de la roue avant elle est vérifiée car $X_J = 0$ et donc on a bien $|X_J| < f.|Y_J|$

On peut alors vérifier si $|X_I| < f.|Y_I|$

A.N. :
$$X_I = 90.9{,}81.0{,}2 = 176{,}58N$$
$$f.Y_I = 0{,}4.\frac{0{,}6}{1{,}2}.90.9{,}81.0{,}98 = 0{,}98.0{,}2.90.9{,}81 = 173{,}05N$$

On constate donc $|X_I| > f.|Y_I|$ ce qui est impossible d'après la loi de Coulomb. $\vec{R}_I = X_I\vec{x}_1 + Y_I\vec{y}_1$ ne peut « sortir » du cône de frottement. Le cycliste est donc dans les conditions proposées en train de légèrement glisser vers l'arrière et $Y_I = 432{,}62N$ et $X_I = f.Y_I = 173{,}04 \simeq 176{,}58N$

On a dépassé très légèrement les conditions d'équilibre sans glissement !
L'adhérence n'est pas assurée.

Q5.Isoler la roue arrière dont on négligera le poids et en déduire le couple $\vec{C}_A$ occasionnant le dérapage de la roue arrière. Faire un schéma de la roue en y représentant les actions mécaniques.

On isole la roue arrière
BAME :

Sol 0 sur 1 : $\{T_{0\to1}\} = \begin{Bmatrix} 173{,}05 & - \\ 432{,}62 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{I \;\text{dans}\,(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$

Cadre 3 sur 1 : $\{T_{3\to1}\} = \begin{Bmatrix} X_{31} & - \\ Y_{31} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{A \;\text{dans}\,(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$

Couple sur 1 : $\{T_{cycliste\to1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ 0 & - \\ - & C_A \end{Bmatrix}_{\forall P \;\text{dans}\,(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$

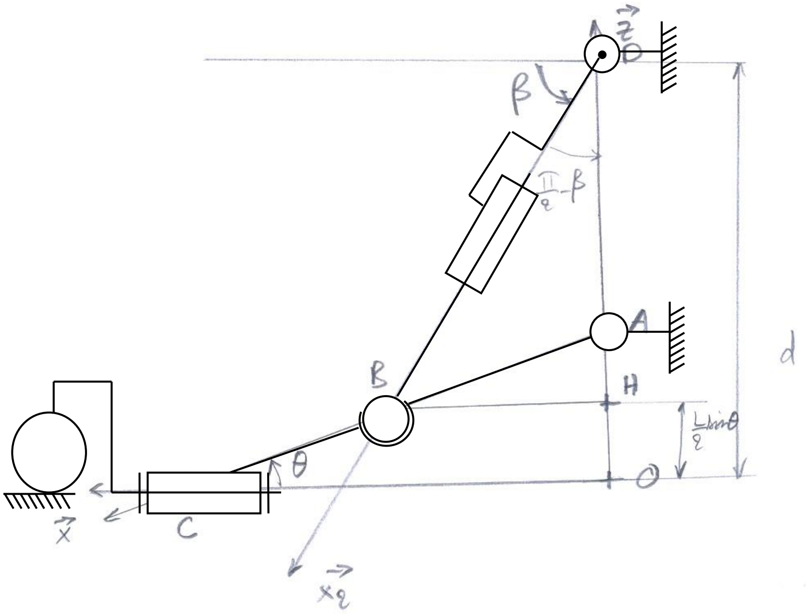
On applique le PFS à la roue 1 et l'équation de moment en A en projection sur $\vec{z}_1$ donne :

$$\vec{M}(A,3\to1).\vec{z}_1 \quad + \quad \vec{M}(A,0\to1).\vec{z}_1 \quad + \quad \vec{M}(A,cyliste\to1).\vec{z}_1 \quad = \quad 0$$
$$0 \quad + \quad \vec{AI}\wedge\vec{R}_I.\vec{z}_1 \quad + \quad C_A \quad = \quad 0$$

D'où $C_A = -R.X_I = 0{,}35.173{,}05 = 60{,}57N.m$

MACHINE A DRAPER 5 AXES

Question 1 :



Question 2 :

L_{34} : liaison pivot d'axe $(C,\vec{x})$

L_{45} : liaison pivot d'axe (centre du rouleau, $\vec{y}$)

Question 3 :

$$\{T_{0\to1}\}=\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ 0 & 0 \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{D,\mathbf{B}i} \qquad \{T_{1\to2}\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{B,\mathbf{B}2}$$

$$\{T_{3\to2}\}=\begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{B,\mathbf{B}i} \qquad \{T_{0\to3}\}=\begin{Bmatrix} X_{03} & L_{03} \\ Y_{03} & 0 \\ Z_{03} & N_{03} \end{Bmatrix}_{A,\,\mathbf{B}i}$$

$$\{T_{3\to4}\}=\begin{Bmatrix} X_{34} & 0 \\ Y_{34} & M_{34} \\ Z_{34} & N_{34} \end{Bmatrix}_{C,\mathbf{B}i} \qquad \{T_{4\to5}\}=\begin{Bmatrix} X_{45} & L_{45} \\ Y_{45} & 0 \\ Z_{45} & N_{45} \end{Bmatrix}_{F,\,\mathbf{B}i}$$

$$\{T_{0\to5}\}=\begin{Bmatrix} 0 & L_{05} \\ 0 & 0 \\ Z_{05} & 0 \end{Bmatrix}_{E,\,\mathbf{B}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F & 0 \end{Bmatrix}_{E,\,\mathbf{B}} \quad \text{donnée du sujet}$$

Pour ce problème plan on a la forme simplifiée $\{T_{i\to j}\}=\begin{Bmatrix} \vec{R}(i\to j) \\ \vec{M}(M,i\to j) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} X_{ij} & 0 \\ 0 & M_{ij} \\ Z_{ij} & 0 \end{Bmatrix}_{M,B}$

Les actions mécaniques transmissibles par les liaisons sont modélisables alors par les torseurs suivants :

$$\{T_{0\to1}\}=\begin{Bmatrix} X_{01} & 0\\ 0 & 0\\ Z_{01} & 0\end{Bmatrix}_{D,\mathbf{B}i} \qquad \{T_{1\to2}\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0\\ 0 & M_{12}\\ Z_{12} & 0\end{Bmatrix}_{B,\mathbf{B}2}$$

$$\{T_{3\to2}\}=\begin{Bmatrix} X_{32} & 0\\ 0 & 0\\ Z_{32} & 0\end{Bmatrix}_{B,\mathbf{B}i} \qquad \{T_{0\to3}\}=\begin{Bmatrix} X_{03} & 0\\ 0 & 0\\ Z_{03} & 0\end{Bmatrix}_{A,\mathbf{B}i}$$

$$\{T_{3\to4}\}=\begin{Bmatrix} X_{34} & 0\\ 0 & M_{34}\\ Z_{34} & 0\end{Bmatrix}_{C,\mathbf{B}i} \qquad \{T_{4\to5}\}=\begin{Bmatrix} X_{45} & 0\\ 0 & 0\\ Z_{45} & 0\end{Bmatrix}_{F,\mathbf{B}i}$$

Question 4 :

On compte alors 13 inconnues de liaison (F est une donnée et p est l'inconnue d'effort extérieur).
Il faut alors isoler 5 solides ou ensembles de solides pour avoir 5x3=15 équations (en espérant en avoir 13 linéairement indépendantes)

Question 5 :

On isole $1\cup2$:
$\{3\to2\}_B+\{0\to1\}_B=\{0\}$ à exprimer dans la base B2.

$$\begin{cases} X_{32} & +X_{01} & =0\\ Z_{32} & +Z_{01} & =0\\ 0 & -bZ_{01} & =0\end{cases}$$

car $\vec{m}(B,0\to1)=\vec{m}(D,0\to1)+\overrightarrow{BD}\wedge\vec{R}(0\to1)$ $\qquad \vec{m}(B,0\to1)=\vec{0}+\begin{vmatrix} b\\ 0\\ 0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix} X_{01}\\ 0\\ Z_{01}\end{vmatrix}=-bZ_{01}\vec{z}_2$

soit $\begin{cases} Z_{32}=Z_{01}=0\\ X_{32}=-X_{01}\end{cases}$ et $\vec{R}(3\to2)$ et $\vec{R}(0\to1)$ sont directement opposés et portés par $\overrightarrow{DB}$.

Question 6 :

On isole 2 :
$\{air\to2\}_B+\{1\to2\}_B+\{3\to2\}_B=\{0\}$ à exprimer dans la base associée à 2 B2.

$$\begin{cases} X_{a2} & +0 & +X_{32} & =0\\ 0 & +Z_{12} & +0 & =0\\ 0 & +M_{12} & +0 & =0\end{cases}$$ implique $X_{a2}=-X_{32}$

donc $\vec{R}(air\to2)$ et $\vec{R}(3\to2)$ sont directement opposés et portés par $\overrightarrow{DB}$.

Question 7 :

On isole $3\cup4\cup5$:
$\{2\to3\}_A+\{0\to5\}_A+\{0\to3\}_A=\{0\}$ à exprimer dans la base associée à 0 B0 $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

$$\begin{cases} -\cos\beta\, X_{32} & +0 & +X_{03} & =0 \\ -\sin\beta\, X_{32} & +F & +Z_{03} & =0 \\ -\frac{L}{2} X_{32}\sin(\beta-\theta) & -(a+L\cos\theta)F & +0 & =0 \end{cases}$$

car $\vec{m}(A,2\to3)=\vec{m}(B,2\to3)+\overrightarrow{AB}\wedge\vec{R}(2\to3)$

$$\vec{m}(A,2\to3)=\vec{0}+\frac{L}{2}\vec{x}_1\wedge -X_{32}\vec{x}_2=-\frac{L}{2}X_{32}\sin(\beta-\theta)\vec{y}$$

soit $\boxed{\vec{R}(air\to2)=-X_{32}\vec{x}_2=\dfrac{(a+L\cos\theta)F}{\frac{L}{2}\sin(\beta-\theta)}\vec{x}_2}$

Question 8 :

$\beta=72°$

A.N. : $\boxed{\vec{R}(air\to2)=-X_{32}\vec{x}_2=-\dfrac{(35+400\cos\theta)100}{200\sin(\beta-\theta)}\vec{x}_2}$

$\left\|\vec{R}(air\to2)\right\|=261N$

Question 9 :

$p=8{,}7bars$

La pression de 10 bars disponible est donc suffisante pour exercer l'effort d'application du rouleau sur la bande de composite à déposer

COLLEUSE DE LAMELLES

1. Torseurs statiques :

$\mathcal{L}$ '**0-11** : Pivot glissant $\{F'_{0\to11}\}=\left\{\begin{matrix} X'_{0\to11} & L'_{0\to11} \\ 0 & 0 \\ Z'_{0\to11} & N'_{0\to11}\end{matrix}\right\}_{B,\,R0}$

$\mathcal{L}$ ''**0-11** : Pivot glissant $\{F''_{0\to11}\}=\left\{\begin{matrix} X''_{0\to11} & L''_{0\to11} \\ 0 & 0 \\ Z''_{0\to11} & N''_{0\to11}\end{matrix}\right\}_{C,\,R0}$

$\mathcal{L}$ **10-11** : Hélicoïdale $\{F_{10\to11}\}=\left\{\begin{matrix} X_{10\to11} & L_{10\to11} \\ Y_{10\to11} & M_{10\to11} \\ Z_{10\to11} & N_{10\to11}\end{matrix}\right\}_{O,\,R0}$ avec $M_{10\to11}=-\dfrac{pas}{2.\pi}.Y_{10\to11}$

$\mathcal{L}$ **0-10** : Pivot $\{F_{0\to10}\}=\left\{\begin{matrix} X_{0\to10} & L_{0\to10} \\ Y_{0\to10} & 0 \\ Z_{0\to10} & N_{0\to10}\end{matrix}\right\}_{O,\,R0}$

2. Liaisons $\mathcal{L}'_{0\text{-}11}$ et $\mathcal{L}''_{0\text{-}11}$ en O :

$\mathcal{L}'_{0\text{-}11}$ en O :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}'_{O(0\to 11)}} = \overrightarrow{\mathfrak{M}_{B(0\to 11)}} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{R'_{0\to 11}} = \begin{vmatrix} L'_{0\to 11} \\ 0 \\ N'_{0\to 11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a \\ \mu \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X'_{0\to 11} \\ 0 \\ Z'_{0\to 11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L'_{0\to 11} + \mu.Z'_{0\to 11} \\ +a.Z'_{0\to 11} \\ N'_{0\to 11} - \mu.X'_{0\to 11} \end{vmatrix}$$

$$\{F'_{0\to 11}\} = {}_O\begin{Bmatrix} X'_{0\to 11} & L'_{0\to 11} + \mu.Z'_{0\to 11} \\ 0 & +a.Z'_{0\to 11} \\ Z'_{0\to 11} & N'_{0\to 11} - \mu.X'_{0\to 11} \end{Bmatrix}_{R0}$$

$\mathcal{L}''_{0\text{-}11}$ en O :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}''_{O(0\to 11)}} = \overrightarrow{\mathfrak{M}''_{C(0\to 11)}} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{R''_{0\to 11}} = \begin{vmatrix} L''_{0\to 11} \\ 0 \\ N''_{0\to 11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} +a \\ \mu \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X''_{0\to 11} \\ 0 \\ Z''_{0\to 11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L''_{0\to 11} + \mu.Z''_{0\to 11} \\ -a.Z''_{0\to 11} \\ N''_{0\to 11} - \mu.X''_{0\to 11} \end{vmatrix}$$

$$\{F''_{0\to 11}\} = {}_O\begin{Bmatrix} X''_{0\to 11} & L''_{0\to 11} + \mu.Z''_{0\to 11} \\ 0 & -a.Z''_{0\to 11} \\ Z''_{0\to 11} & N''_{0\to 11} - \mu.X''_{0\to 11} \end{Bmatrix}_{R0}$$

3. Equations d'équilibre du solide 10

$X_{0\to 10} - X_{10\to 11} = 0$

$Y_{0\to 10} - Y_{10\to 11} = 0$

$Z_{0\to 10} - Z_{10\to 11} = 0$

$L_{0\to 10} - L_{10\to 11} = 0$

$C_m - M_{10\to 11} = 0$

$N_{0\to 10} - N_{10\to 11} = 0$

4. Equations d'équilibre du solide 11

$X_{10\to 11} + X'_{0\to 11} + X''_{0\to 11} = 0$

$Y_{10\to 11} - P = 0$

$Z_{10\to 11} + Z'_{0\to 11} + Z''_{0\to 11} = 0$

$L'_{0\to 11} + \mu.Z'_{0\to 11} + L''_{0\to 11} + \mu.Z''_{0\to 11} + L_{10\to 11} = 0$

$+a.Z'_{0\to 11} - a.Z''_{0\to 11} + M_{10\to 11} = 0$

$N'_{0\to 11} - \mu.X'_{0\to 11} + N''_{0\to 11} - \mu.X''_{0\to 11} + N_{10\to 11} = 0$

5.

On utilise l'équation de moment : $M_{11\to 10} + C_m = 0$, la relation : $M_{10\to 11} = -\dfrac{pas}{2.\pi}.Y_{10\to 11}$ et l'équation de résultante $Y_{10\to 11} - P = 0$

$$C_m = M_{10\to 11} = -\frac{pas}{2.\pi}.Y_{10\to 11} = \frac{-pas}{2\pi}.P$$

A.N. : *P = 100 N* et *pas = 6,28 mm*

$\boxed{Cm = -0{,}1\ N.m}$

Conclusion : Le couple moteur prévu par le constructeur est largement supérieur à la valeur trouvée. (facteur 10)