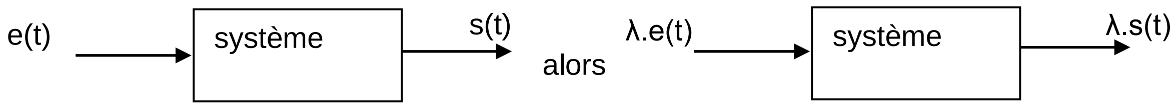
LES SYSTEMES ASSERVIS – MODELISATION DES SLCI

1. SLCI : SYSTEME LINEAIRE CONTINU INVARIANT

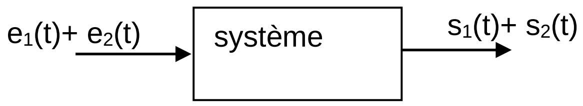
On appelle **système linéaire continu invariant** dans ce cours, la modélisation d'un système physique dont les variations dans le temps de grandeurs physiques observées sont modélisables par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.
De nombreux phénomènes physiques se représentent ainsi en mécanique, en électrocinétique, électromagnétisme, en chimie, …

Linéarité : l'effet est proportionnel à la cause. Une somme de cause donne une somme d'effet.

Principe de proportionnalité :



Principe de superposition :

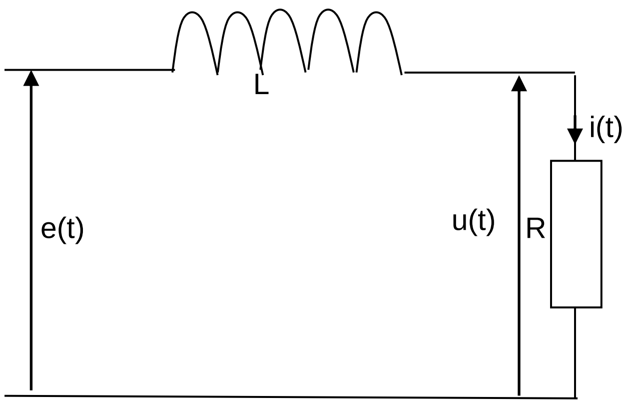


Variables continues : les systèmes auxquels on s'intéresse en CPGE sont ou sont supposés transformer des grandeurs physiques continues.

Caractéristiques constantes : Les relations entre les variables ne changent pas aux cours du temps. Exemple : un four de traitement thermique n'est pas rigoureusement un système invariant car son isolation se détériore sensiblement dans le temps. Si les caractéristiques des briques réfractaires varient à l'échelle de quelques semaines et si la durée d'un traitement thermique est de l'ordre de quelques heures, l'approximation de l'invariance est valide.

De tels systèmes sont représentables par des **équations différentielles à coefficients constants.**

Exemple : **circuit électrique RL** (résistance + bobine)



La tension e(t) prise comme entrée et la tension u(t) prise comme sortie.

Les lois des mailles et d'Ohm donnent :

$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$$
$$u(t) = Ri(t).$$

Nous obtenons donc : $e(t) - u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = \frac{L}{R}\frac{du(t)}{dt}$.

Soit : $\frac{L}{R}.\dot{u}(t) + u(t) = e(t)$ (1)

On peut alors lui appliquer la **Transformation de Laplace** aux conditions initiales nulles :

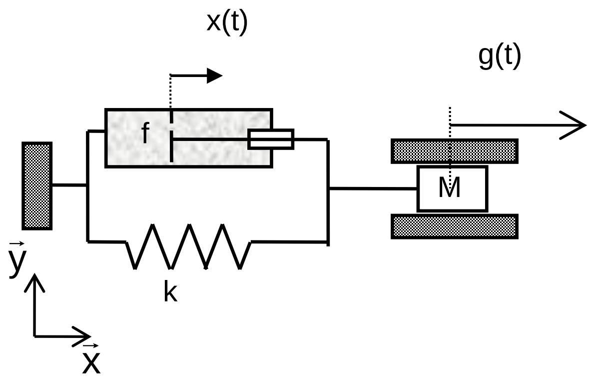
$$\frac{L}{R}.p.U(p)+U(p)=E(p) \quad \text{soit} \quad \left(\frac{L}{R}.p+1\right).U(p)=E(p) \quad (2)$$

et on note $H(p)=\dfrac{U(p)}{E(p)}=\dfrac{1}{1+\frac{L}{R}p}$ la **fonction de transfert** du circuit.

L'intérêt de cette transformation est de représenter les équations différentielles (1) à l'aide d'équations algébriques (2) dans lesquelles les dérivées sont remplacées par une multiplication par la variables de Laplace p. Ainsi une équation différentielle faisant apparaitre les dérivées successives (dérivée première, dérivée seconde, etc…) sera représentée dans **l'espace de Laplace** par une équation faisant apparaitre un polynôme image de la prise en compte dans l'équation des dérivées successives de la grandeur physique.

Autres exemples :

Système mécanique masse ressort amortisseur pour lequel la force g(t) est prise comme entrée et la position, par rapport à l'équilibre, x(t) prise comme sortie. L'application du PFD permet d'établir :
$g(t)-f.\dot{x}(t)-k.x(t)=M.\ddot{x}(t)$



Système asservi (asservissement de position) sera représenté par un ensemble d'équations différentielles traduisant les dynamiques des différents composants (actionneurs, capteurs, modulateur, inerties des effecteurs, carte de commande).

L'usage de la Transformée de Laplace permet de rendre plus facile la manipulation de ces systèmes d'équations différentielles.

Le but n'étant pas de systématiquement résoudre les équations mais d'accéder aux valeurs numériques permettant de prévoir selon ce modèle les **performances** de stabilité, amortissement, rapidité, précision.

2. TRANSFORMÉE DE LAPLACE

2.1. DÉFINITION

On appelle transformée de LAPLACE unilatérale d'une fonction temporelle x(t) nulle pour $t \langle 0$ (fonction causale), la fonction de la variable complexe p :

$$\boxed{X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt}$$

Nous avons donc : $x(t) \xrightarrow{L} X(p)$

$$X(p) \xrightarrow{L^{-1}} x(t)$$

x(t) est une fonction du temps représentant l'évolution temporelle d'une grandeur physique donc une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ *+ dans $\mathbb{R}$

X(p) est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui n'a plus vraiment de sens physique mais qui correspond à x(t)

L'étude des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ n'étant pas au programme de mathématiques des CPGE, nous ne démontrerons pas toutes les propriétés de ces Transformées de Laplace et nous contenterons d'utiliser leurs propriétés pour accéder aux informations numériques utiles à l'étude des performances des systèmes étudiés.

2.2. PROPRIÉTÉS

2.2.1. Linéarité $L\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha L\{x_1(t)\} + \beta L\{x_2(t)\} = \alpha X_1(p) + \beta X_2(p)$

Démonstration :
D'après la propriété de linéarité de l'intégrale, nous avons :

$$\int_0^{\infty} (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) e^{-pt} dt = \alpha X_1(p) + \beta X_2(p)$$

2.2.2. Transformée de LAPLACE de la dérivée première

$$\text{Si } x(t) \xrightarrow{L} X(p) \text{ alors } \boxed{\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{L} pX(p) - x(t=0)}$$

Démonstration :

Soit $X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt$. Calculons $\int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-pt} dt$. Pour cela, intégrons par parties en posant : $u(t) = e^{-pt}$ et $dv(t) = \frac{dx(t)}{dt} dt$.

$\int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-pt} dt = \left[x(t)e^{-pt}\right]_0^{\infty} + p\int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt = -x(t=0) + pX(p)$, soit :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-pt} dt = pX(p) - x(t=0)$$

2.2.3. Transformée de LAPLACE de la dérivée seconde

$$\text{Si } x(t) \xrightarrow{L} X(p) \text{ alors } \frac{d^2x(t)}{dt^2} \xrightarrow{L} p^2X(p) - px(t=0) - \frac{dx(t=0)}{dt}$$

2.2.4. Transformée de LAPLACE d'une intégrale $\int_0^t x(u)du$

$$\text{Si } x(t) \xrightarrow{L} X(p) \text{ alors } \boxed{\int_0^t x(u)du \xrightarrow{L} \frac{X(p)}{p}}$$

2.3. Remarque

L'utilisation de la transformée de Laplace dans ce cours consiste donc à associer, respectivement, à l'opérateur dérivée et à l'opérateur intégral dans le domaine temporel les opérateurs p et $\frac{1}{p}$ qui conduisent à une **équation polynomiale**.

Afin de faire apparaître des fonctions de transfert, il est nécessaire que les conditions initiales $x(t=0)$, $\frac{dx(t=0)}{dt}$ soient nulles. Sinon, il faut faire un changement de variable.

L'intérêt du calcul symbolique est donc clair : remplacer des équations différentielles linéaires par des équations algébriques.

$$a\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = y(t) \qquad \text{donne}$$
$$ap^2X(p) + bpX(p) + cX(p) = \left(ap^2 + bp + c\right) X(p) = Y(p)$$

2.4. Théorème de la valeur initiale

$$\boxed{\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{Re(p)\to\infty} pX(p)}$$

2.5. Théorème de la valeur finale

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{p\to 0} pX(p)}$$

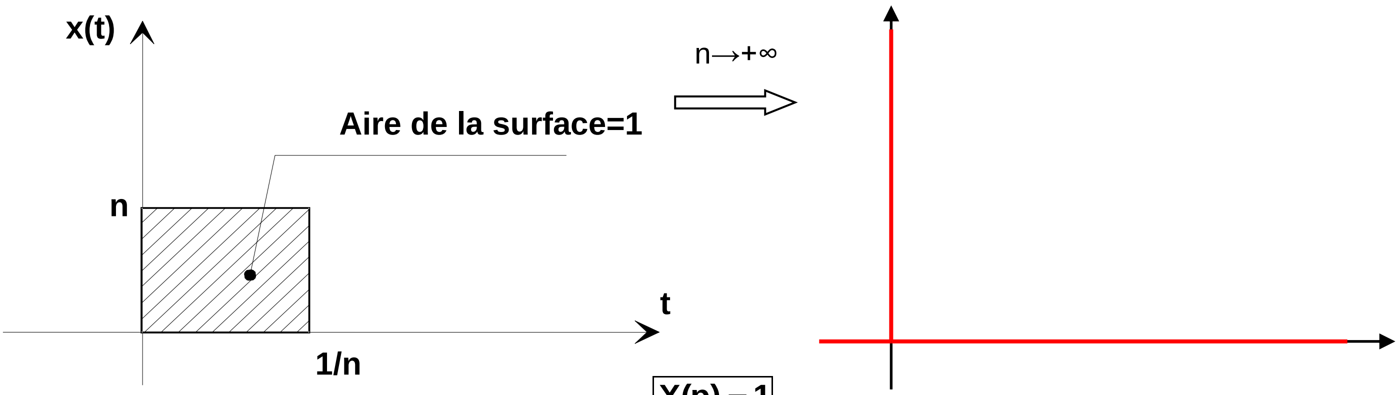
2.6. Théorème du retard

$$\text{Si } x(t) \xrightarrow{L} X(p) \text{ alors } \boxed{x(t-\tau) \xrightarrow{L} e^{-p\tau}X(p)}$$

2.7. EXEMPLES

2.7.1. Transformée de LAPLACE de l'impulsion de DIRAC

L'impulsion de DIRAC est une impulsion physique d'amplitude n et de surface unité obtenue en faisant tendre n vers l'infini. Cela revient à générer une amplitude infinie pendant un temps nul, permettant ainsi de modéliser des chocs mécaniques ou des pics de tension ou d'intensité électrique.



$$\boxed{X(p) = 1}$$

2.7.2. Transformée de LAPLACE d'un échelon d'amplitude A

$$\boxed{X(p) = \frac{A}{p}}$$

2.7.3. Transformée de LAPLACE de at

$$\boxed{X(p) = \frac{a}{p^2}}$$

2.7.4. Transformée de LAPLACE de e^{-at}

$$\boxed{X(p) = \frac{1}{p+a}}$$

2.7.5. Transformée de LAPLACE de te^{-at}

$$\boxed{X(p) = \frac{1}{(p+a)^2}}$$

2.7.6. Transformée de LAPLACE de $\cos\omega t$ et $\sin\omega t$

$$\boxed{\int_0^\infty \cos\omega t \, e^{-pt} dt = \frac{p}{p^2+\omega^2}} \qquad \boxed{\int_0^\infty \sin\omega t \, e^{-pt} dt = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}}$$

2.7.7. Transformée de LAPLACE de $e^{-at}\cos\omega t$ et $e^{-at}\sin\omega t$

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-at}\cos\omega t \, e^{-pt} dt = \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}} \qquad \boxed{\int_0^\infty e^{-at}\sin\omega t \, e^{-pt} dt = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}}$$

2.7.8. Tableau résumé

x(t) avec $x(t) \langle 0$	**X(p)**
$\delta(t)$: impulsion de DIRAC	1
A	$\frac{A}{p}$
at	$\frac{a}{p^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

Exercices :

En précisant les propriétés et résultats employés, exprimer les transformées de Laplace des fonctions du temps suivantes :

exo1. $x(t) = 0{,}5$

exo2. $z(t) = e^{-3t}$

exo3. $s(t) = 0{,}5.t + e^{-3t} + 4$

exo4. $y(t) = 2t.e^{-3t}$

exo5. $e(t) = 2.\sin(2t)$

exo6. $v(t) = k.\sin(\omega t + \varphi)$

exo7. $\omega(t) = Ke^{-2t}.\sin(3t + 1) + 1$

exo8. $\theta(t) = (1 + \sin 3t)^2$

exo9. $\varphi(t) = t^2 + 3.t$

3. REPRESENTATION D'UN SLCI PAR SCHEMA BLOC

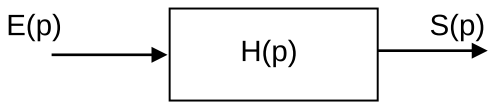
Dans ce chapitre, toutes les grandeurs physiques temporelles sont exprimées en minuscule : la variable t sera indiquée. Toutes les transformées de Laplace des grandeurs physiques temporelles sont exprimées en majuscule et on précisera la variable p.
Par exemple : $L(u(t)) \rightarrow U(p)$

3.1. Définition

Un "schéma bloc" est une représentation graphique des équations, exprimées dans l'espace de Laplace, du système. Les grandeurs physiques $E(p)$, $S(p)$ sont appelées ici "fonctions" de la variable de Laplace p. Le schéma que l'on décrit ici est donc appelé "*fonctionnel*".

3.2. Ecriture graphique d'une équation

On a vu qu'un système asservi linéaire, caractérisé par une **fonction de transfert** ou **transmittance** H(p), et dont l'entrée est E(p), fournit une sortie d'équation : $S(p) = H(p).E(p)$



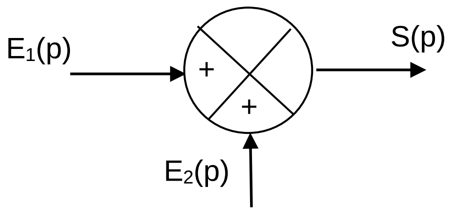
Le schéma est donc la traduction graphique de cette équation, et le bloc a un **sens multiplicatif**.

E(p) et S(p) sont des **fonctions non explicites** de la variable p, car elles représentent des grandeurs physiques qui peuvent évoluer de diverses manières dans le temps.

H(p) est une **fonction explicite** de la variable p, intrinsèque au système qu'elle modélise, généralement une fraction rationnelle de cette variable, déterminée par un modèle de connaissance ou un modèle de comportement.

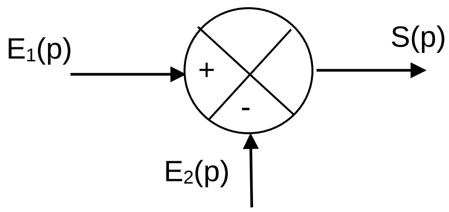
3.2.1. Une somme et une différence

sont traduites graphiquement par :



$S(p)= E_1(p)+ E_2(p)$

et par ce que l'on appelle souvent comparateur pour un asservissement ou une régulation:

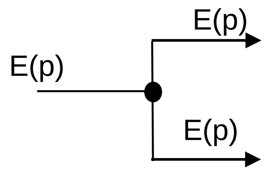


$S(p)= E_1(p)- E_2(p)$

Ces représentations correspondent à des sommes ou différences de grandeurs physiques.

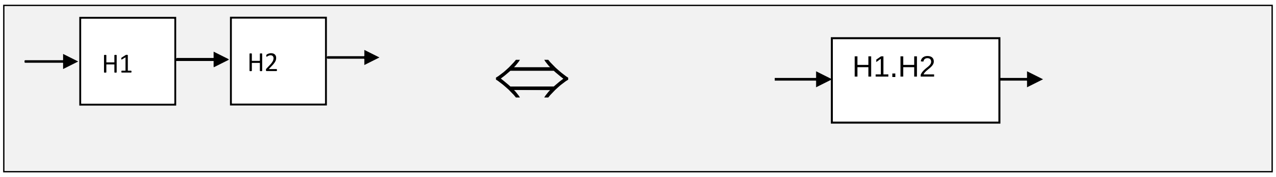
3.2.2. Point de prélèvement

L'égalité de deux fonctions est représentée par une connexion des arcs qui les représentent ("point de prélèvement").

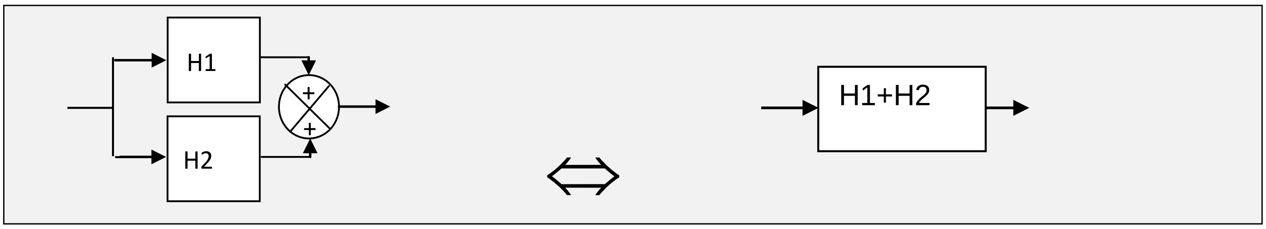


3.3. Transformation des schémas blocs.

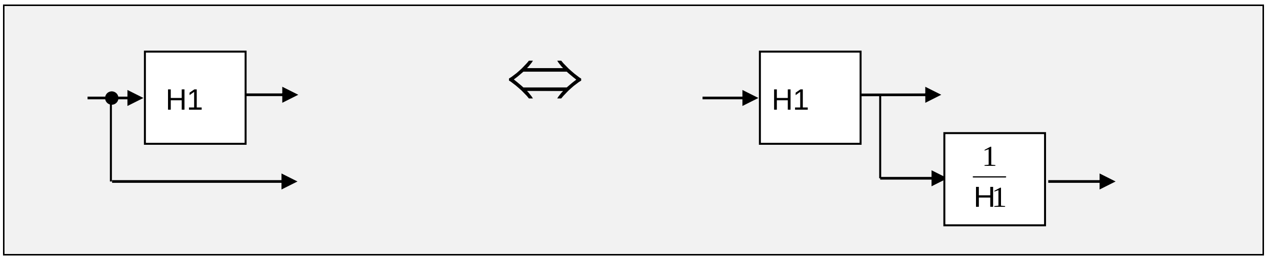
3.3.1. Série :



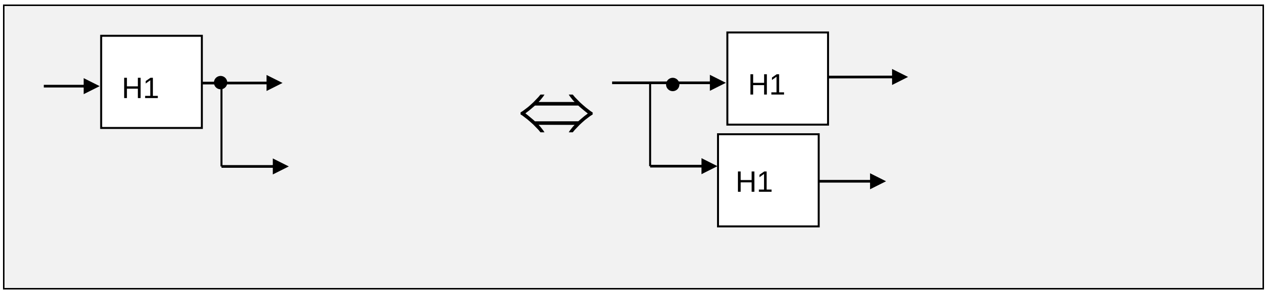
3.3.2. Parallèle :



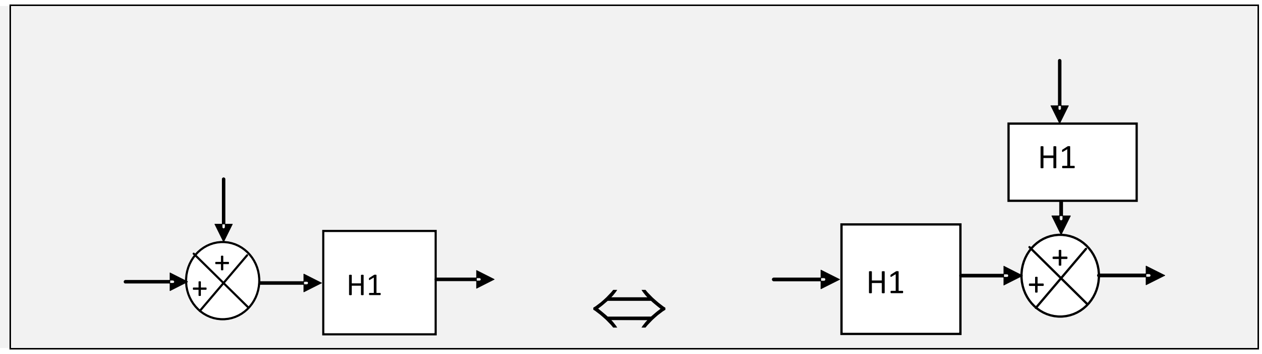
3.3.3. Déplacement d'un point de prélèvement après un bloc :



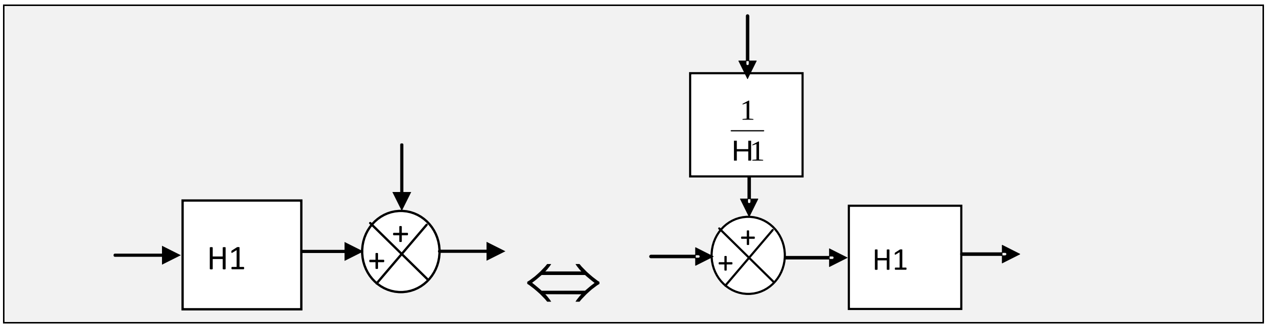
3.3.4. Déplacement d'un point de prélèvement avant un bloc :



3.3.5. Déplacement d'un sommateur après un bloc :



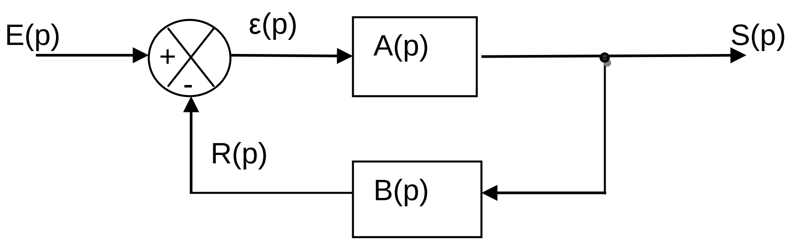
3.3.6. Déplacement d'un sommateur avant un bloc :



3.4. Fonction de transfert en boucle fermée

Les schéma blocs vont permettre de représenter des systèmes linéaires pouvant présenter des rétroactions ou des couplages caractérisés par des boucles dans les schémas blocs. C'est le cas notamment des systèmes asservis dans lesquels le capteur permet de prendre en compte à tout instant la mesure de la grandeur à asservir.

Dans le schéma fonctionnel suivant :



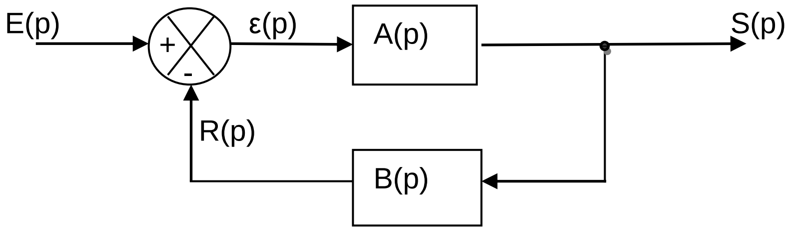
On appelle fonction de transfert en boucle fermée notée $FTBF(p) = H_{BF}(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

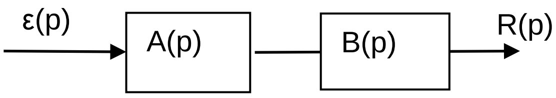
formule de Black

3.5. Fonction de transfert en boucle ouverte

Dans ce même schéma fonctionnel :



On peut extraire :



On appelle fonction de transfert en boucle ouverte notée $FTBO(p) = H_{BO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)}$

$$FTBO(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = A(p)B(p)$$

On remarque que la FTBO ouverte n'est définie que pour un système en boucle fermé et qu'on la retrouve au dénominateur de la FTBF. Les propriétés de cette fonction permettra de prévoir les performances en boucles fermée de l'asservissement.

En conclusion de ce chapitre, observons que les transformations des schémas-blocs sont des manipulations graphiques d'équations, permettant de partir de boucles non imbriquées (cas fréquent) et de parvenir facilement à des boucles imbriquées.

Le calcul de la transmittance globale est alors immédiat, comme exposé ci-dessus. Une manipulation purement algébrique, équivalente du point de vue des calculs, ne conduirait pas si aisément au résultat.

Exercices :

En précisant les théorèmes employés, écrire les transformées de Laplace des équations différentielles suivantes, en supposant les conditions initiales nulles. Exprimer les fonctions de transfert $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$ *correspondante :*

exo1. $3.s(t) + \ddot{s}(t) - 3.e(t) = 0$

exo2. $k.(e(t) - s(t)) = M.\ddot{s}(t)$

exo3. $3.\dddot{s}(t) + \ddot{s}(t) + \dot{s}(t) + s(t) - 3.e(t) + \dot{e}(t) = 0$

4. ELEMENTS DE MODELISATION ET FONCTION DE TRANSFERT CLASSIQUES

4.1. actionneur

- vérin : relation position de tige-débit de fluide dans la chambre du vérin

$$H(p) = \frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{1}{Sp}$$

- Moteur à courant continu : relation vitesse-tension d'alimentation

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{1 + T_m.p} \quad \textbf{ou} \quad H(p) = \frac{\frac{1}{Ke}}{\frac{f.R}{Ke.Km} + 1 + \frac{L.f + R.J}{Ke.Km}.p + \frac{L.J}{Ke.Km}.p^2}$$

Selon la modélisation proposée et la prise en compte de certains phénomènes mécaniques, électrocinétiques et électromagnétiques.

4.2. transmetteur-liaisons mécaniques

- **liaison pivot**

Elle correspond au guidage en rotation d'un objet (roue, etc…) et le paramètre géométrique qui lui correspond est l'angle de rotation (en radian ou degré) ou la vitesse angulaire ou fréquence de rotation (en rad/s ou tr/min). Elle sera caractérisée précisément dans le cours de mécanique des solides.

- **liaison glissière**

Elle correspond au guidage en translation d'un objet (coulisseau, tiroroue, etc…) et le paramètre géométrique qui lui correspond est la position (en m) ou la vitesse (en m/s).
Elle sera caractérisée précisément dans le cours de mécanique des solides.

- **liaison hélicoïdale (vis-écrou de pas de vis noté « pas »)**

$$H(p) = \frac{pas}{2\pi}$$

4.3. intégration $H(p) = \frac{1}{p}$

représente l'intégration d'une grandeur physique fonction du temps

exemples : relation vitesse-position ou relation débit-volume

5. REPONSES D'UN SYSTEME LINEAIRE

5.1. Réponses transitoires d'un système linéaire

Un régime transitoire d'un système linéaire est un état à un instant t. Un régime permanent est un état pour $t \to \infty$.

La réponse transitoire d'un système à une entrée $e(t)$ est sa sortie $s(t)$ pour $t \in [0,+\infty[$. Les entrées classiques que l'on peut imposer sont des fonctions élémentaires : une impulsion de Dirac, un échelon, une rampe ...

- La réponse à une impulsion de Dirac est appelée **réponse impulsionnelle** ;
- La réponse à un échelon unitaire est appelée **réponse indicielle** ;
- La réponse à une rampe est appelée **réponse à une rampe** .

5.2. Réponse harmonique d'un système linéaire

La réponse harmonique est l'étude de la sortie en régime permanent, causée par des sinusoïdes de fréquence variable.

On montrera que si l'entrée est de la forme $e(t) = e_0 \sin \omega t$, alors la sortie en régime permanent est de la forme $s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$.

- Le rapport $\frac{s_0}{e_0}$ est le gain, c'est-à dire l'amplification entre l'entrée et la sortie.
- φ est le déphasage entre l'entrée et la sortie, appelé simplement phase du système, et qui dépend de ω.

On montrera par ailleurs que ce gain et cette phase sont égaux respectivement au module et à l'argument du complexe $H(j\omega)$, valeur de la transmittance $H(p)$ pour $p = j.\omega$.

On notera le gain et la phase, qui sont des fonctions réelles de la variable réelle ω, respectivement $|H(j\omega)|$ et $\varphi(\omega)$.

En résumé:

Gain : $A(\omega) = |H(j\omega)|$

Phase : $\varphi(\omega) = Arg(H(j\omega))$

L'étude de la réponse harmonique s'un SLCI sera vue expérimentalement en première période lors de séances de TP.

L'étude théorique de cette réponse harmonique sera conduite en utilisant la représentation des diagrammes fréquentiels adaptés à l'étude de cette réponse harmonique (diagrammes de Bode).

6. SYSTEME ASSERVI LINEAIRE DU PREMIER ORDRE.

6.1. Définition

Un système linéaire est dit du 1er ordre s'il est régi par une équation différentielle entre l'entrée e(t) et sortie s(t), de la forme:

$s(t) + T.\dot{s}(t) = K.e(t)$ où T et K sont des réels

c'est à dire si sa fonction de transfert est de la forme:

$$H(p) = \frac{K}{1+T.p}$$

K est appelé **gain statique** de la fonction de transfert.

T est appelée **constante de temps** de la fonction de transfert.

6.2. Exemple

Etude du circuit RC

Reprenons le circuit RC

dont la transmittance a été déterminée comme : $H(p) = \frac{1}{1+R.C.p}$

C'est donc un système du 1er ordre.

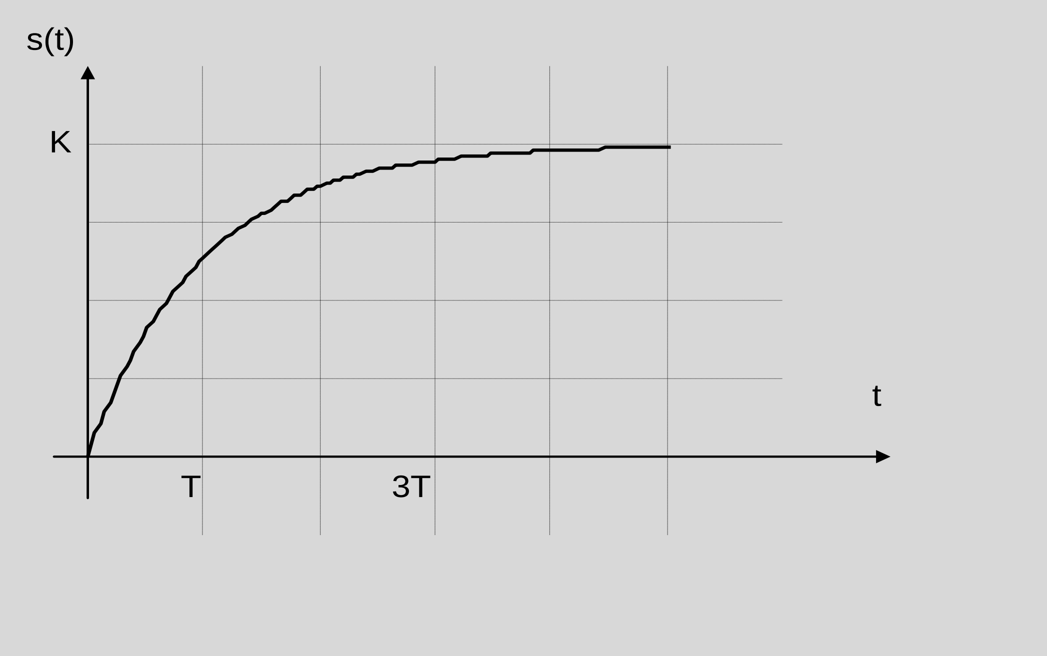
6.3. réponse indicielle. Gain statique et constante de temps.

Dans l'étude du circuit ci-dessus, on avait obtenu la réponse à un échelon unitaire : $s(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{R.C}}\right)$.

De la même manière, on montre que la réponse indicielle d'un système du 1er ordre, de transmittance $H(p) = \frac{K}{1+T.p}$, est:

$$s(t) = K.\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

L'allure du graphe de la **réponse indicielle** est le suivant:



- La pente à l'origine est $\frac{K}{T}$.

Cette pente non nulle à l'origine est typique d'un premier ordre. T est la constante de temps; elle contrôle le taux de croissance de l'exponentielle.

- K est le **gain statique**, limite du gain $\frac{s(t)}{e(t)}$ pour $t \to \infty$

Plus précisément, on retiendra que:

- pour $t = T$, la réponse est distante de l'asymptote horizontale de 35%.
- Pour $t = 3T$, elle n'en est plus distante que de 5%.

Le temps de réponse à 5% est donc $t_{r5\%}=3T$

1.1. réponse à une rampe unitaire

Une rampe unitaire est la fonction e(t) = a.t

Sa transformée de Laplace est $E(p)=\frac{a}{p^2}$.

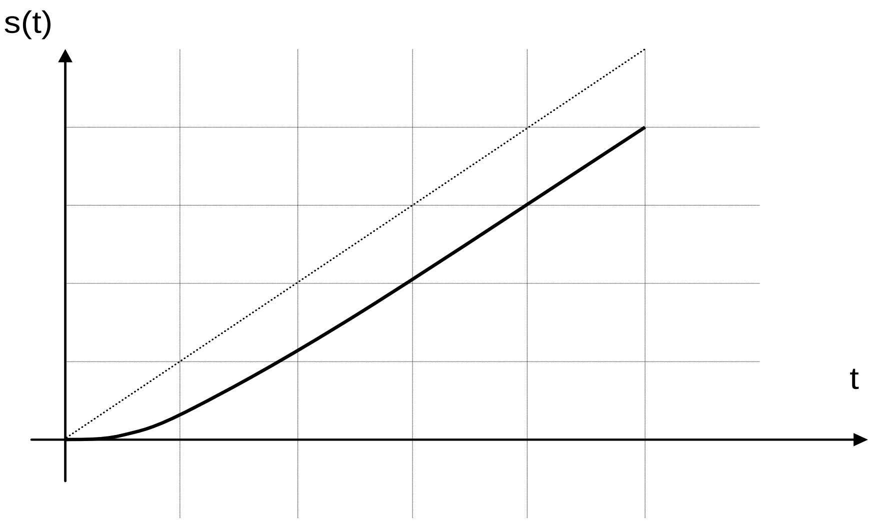
La réponse dans l'espace de Laplace est donc $S(p)=E(p).H(p)=\frac{K.a}{p^2.(1+T.p)}$

que l'on décompose en éléments simples: $S(p)=\frac{K.a}{p^2.(1+T.p)}=K.a.\left(\frac{1}{p^2}-\frac{T}{p}+\frac{T^2}{1+T.p}\right)$

La transformation de Laplace inverse en est: $s(t)=K.a.\left(t-T+T.e^{-\frac{t}{T}}\right)$

Pour simplifier le graphe et son interprétation, supposons que K=1(cas de l'exemple du circuit RC étudié dans ce cours) et a=1 (rampe unitaire) l'erreur de traînage est alors T, et le retard de traînage est T.

L'allure du graphe de **la réponse à une rampe unitaire** est alors



7. SYSTEME LINEAIRE DU SECOND ORDRE.

1.2. Définition

Un système linéaire est dit du 2ème ordre s'il est régi par une équation différentielle entre l'entrée e(t) et sortie s(t), de la forme:

$$s(t)+\frac{2\xi}{\omega_0}.\dot{s}(t)+\frac{1}{\omega_0^{\,2}}.\ddot{s}(t)=K.e(t)$$

c'est à dire si sa fonction de transfert est de la forme:

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}.p+\frac{1}{\omega_0^{\,2}}.p^2}$$

où ξ , ω_0 ω_0 et K sont des réels que l'on nomme :

ξ : coefficient d'amortissement (sans unité)
ω_0 : pulsation propre (en s^{-1})
K : gain statique (unité dépendant des grandeurs d'entrée et de sortie du système)

1.3. Exemple

Prenons un moteur à courant continu dont la transmittance a été déterminée comme :

$$H(p)=\frac{1}{\frac{bR}{k}+k+\frac{Lb+RJ}{k}.p+\frac{LJ}{k}.p^2}$$

avec L inductance et R résistance de l'induit, k constante de couplage électromagnétique, J moment d'inertie de l'arbre moteur.

C'est donc un système linéaire du 2ème ordre.

1.4. Réponse indicielle

La réponse indicielle est la transformée de Laplace inverse de $S(p)=H(p)E(p)$ **avec** $E(p)=\frac{1}{p}$

$$S(p)=\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}.p+\frac{1}{\omega_0^{\,2}}.p^2}.\frac{1}{p} \qquad S(p)=\frac{K.\omega_0^{\,2}}{\omega_0^{\,2}+2\xi\omega_0.p+p^2}.\frac{1}{p}$$

équation caractéristique : $\omega_0^{\,2}+2\xi\omega_0.p+p^2=0$ **(E)**

discriminant $\Delta=4\omega_0^{\,2}(\xi^2-1)$

3 cas sont à distinguer $\Delta>0, \Delta=0, \Delta<0$ **correspondant à des conditions sur le coefficient d'amortissement :** $\xi>1$**,** $\xi=1$ **et** $\xi<1$**.**

Cas $\xi > 1$

On obtient alors 2 racines réelles du dénominateur de la fonction de transfert et une décomposition en éléments simple de $S(p)$ de la forme :

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p - p_1} + \frac{\gamma}{p - p_2} = \frac{K.\omega_0^{\ 2}}{(p - p_1)(p - p_2)} . \frac{1}{p}$$

Avec $p_1 = -\frac{1}{\tau_1} = -\omega_0\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$ et $p_2 = -\frac{1}{\tau_2} = -\omega_0\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$

Après identification des coefficients par utilisation de la linéarité et du tableau des transformées de Laplace, on obtient :

$$s(t) = K\left(1 + \frac{\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\tau_2 - \tau_1} - \frac{\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_2 - \tau_1}\right)$$

On appelle s(t), **la réponse apériodique** d'un système du second ordre.

Cas $\xi = 1$

On obtient alors 1 racine réelle double du dénominateur de la fonction de transfert et une décomposition en éléments simple de $S(p)$ de la forme :

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{(p - p_1)^2} + \frac{\gamma}{p - p_1} = \frac{K.\omega_0^{\ 2}}{(p - p_1)^2} . \frac{1}{p}$$

Avec $p_1 = -\omega_0$

Après identification des coefficients par utilisation de la linéarité et du tableau des transformées de Laplace, on obtient :

$$s(t) = K\left(1 - \omega_0 t e^{-\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}\right)$$

On appelle s(t), **la réponse apériodique critique** d'un système du second ordre

On peut vérifier pour ces 2 expression les conditions initiales nulles suivantes :

$s(0) = 0; \quad \dot{s}(0) = 0$ ordonnée et pente nulle à l'origine pour t=0

Cas $\xi < 1$

On obtient alors 2 racines complexes conjuguées du dénominateur de la fonction de transfert et une décomposition en éléments simple de $S(p)$ de la forme :

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta p + \gamma}{(p+\xi.\omega_0)^2 + \omega_0^2(1-\xi^2)} = \frac{K.\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)}.\frac{1}{p}$$

Après identification des coefficients par utilisation de la linéarité et du tableau des transformées de Laplace, on obtient :

$$s(t) = K - \frac{K}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t + \Phi\right)$$

avec $\Phi = \arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

On appelle s(t), **la réponse pseudo-périodique** d'un système du second ordre

On détermine les dépassements successifs de s(t) correspondant aux points de pente nulle (dérivée nulle) :

$$d_k = s(t_k) - K = -\frac{K}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t_k} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t_k + a\tan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) = -\frac{K}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{k\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \sin\left(k\pi + a\tan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

$$d_k = -(-1)^k \frac{K}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{k\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \sqrt{1-\xi^2}$$

$$d_k = -(-1)^k K e^{-\frac{k\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

On remarque que la valeur des dépassements relatifs $D_k = \frac{d_k}{K}$ ne dépend que de ξ

On peut donc identifier le coefficient d'amortissement par mesure de ce dépassement.
On retiendra sur cette réponse indicielle pseudo périodique du second ordre :

Les formules du premier dépassement

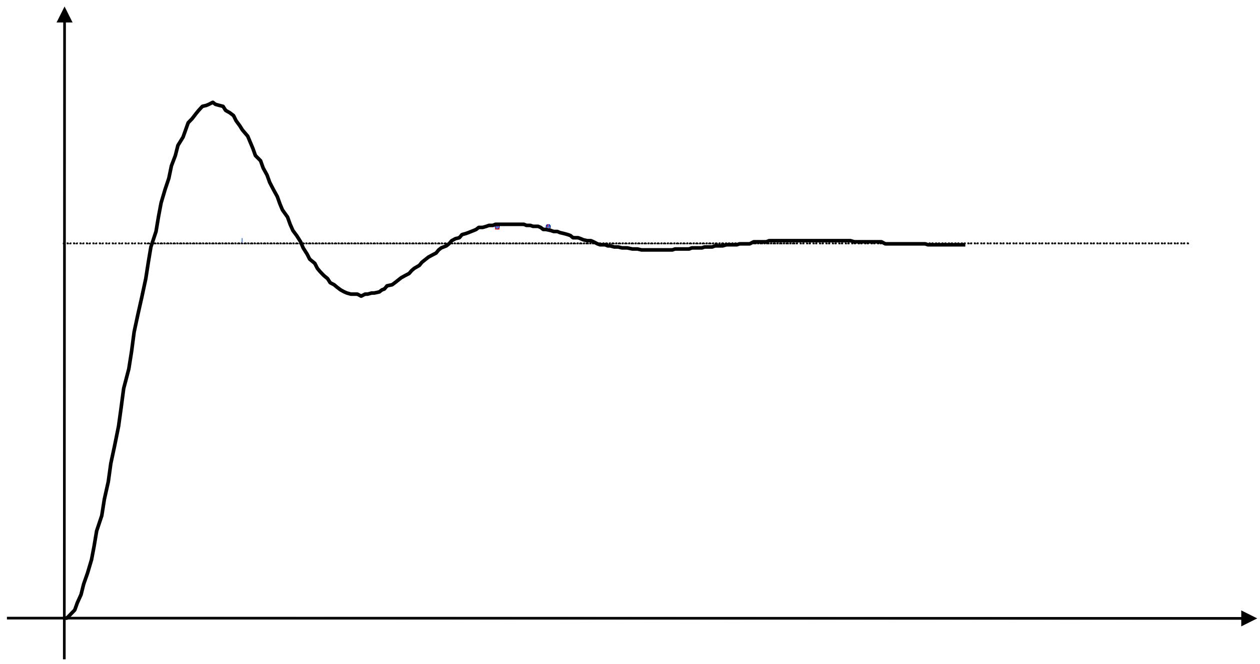
$D_1 = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ ou en % de la valeur finale $D_{1\%} = 100.e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

et de la pseudo-période

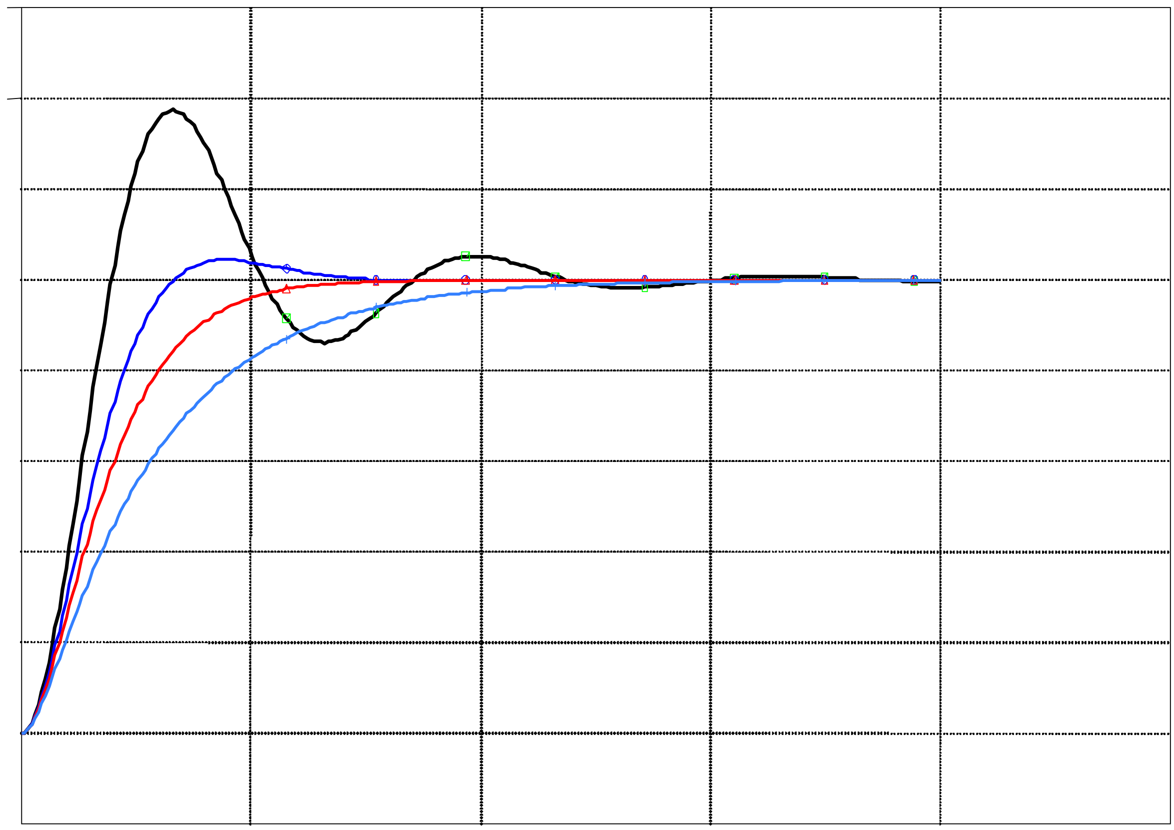
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$$

La pente à l'origine est nulle. Cette pente nulle à l'origine est typique d'un second ordre.
ξ est le coefficient d'amortissement.

$\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ est la pseudo-pulsation du système amorti.



Réponses indicielles d'un second ordre pour $\xi = 0,3;\ \xi = 0,7;\ \xi = 1;\ \xi = 1,5$



Abaque du temps de réponse réduit d’un système du second ordre