1. Rappels de calculs littéraux et numériques utiles en automatique des systèmes asservis

1.1. Identifier les valeurs numériques des paramètres littéraux a et b tels que :

$$(\mathrm{x}+\mathrm{a})(\mathrm{x}+\mathrm{b})=\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}+2$$

1.2. Identifier les valeurs numériques des paramètres littéraux a et b tels que :

$$(\mathrm{x}+\mathrm{a})(\mathrm{x}+\mathrm{b})=\mathrm{x}^2+4{,}5\mathrm{x}+4{,}5$$

1.3. Identifier les valeurs numériques des paramètres littéraux $\alpha, \beta, \mathrm{a}$ et b tels que :

$$\frac{1}{\mathrm{x}^2+5\mathrm{x}+6}=\frac{\alpha}{\mathrm{x}+\mathrm{a}}+\frac{\beta}{\mathrm{x}+\mathrm{b}}$$

1.4. Identifier les paramètres littéraux α et β tels que :

$$\frac{1}{\mathrm{x}(\mathrm{x}+\mathrm{a})}=\frac{\alpha}{\mathrm{x}}+\frac{\beta}{\mathrm{x}+\mathrm{a}}$$

1.5. Identifier les valeurs numériques des paramètres littéraux $\alpha, \beta, \gamma, \omega, \mathrm{a}$ et b tels que :

$$\frac{1}{p^3+6\mathrm{p}^2+12\mathrm{p}+7}=\frac{\alpha}{\mathrm{p}+\mathrm{a}}+\frac{\beta\mathrm{p}+\gamma}{(\mathrm{p}+\mathrm{b})^2+\omega^2}$$

1.6. Identifier les valeurs numériques des paramètres littéraux a et b tels que :

$$\mathrm{e}^{-2+3\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{-2-3\mathrm{i}}=\mathrm{a}+\mathrm{i}.\mathrm{b}$$

(i étant l'imaginaire pur de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$)

1.7. Identifier les valeurs numériques des paramètres littéraux réels positifs k, ω et φ tels que :

$$\mathrm{k}.\sin(\omega\mathrm{t}+\varphi)=3.\sin(2\mathrm{t})+\cos(2\mathrm{t})$$

1.8. Tracer le plus précisément possible la courbe représentative de la fonction du temps (loi horaire) sur l'intervalle $\mathrm{t}\in[0{,}2]$:

$$\mathrm{x}(\mathrm{t})=1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}$$

1.9. Tracer le plus précisément possible la courbe représentative de la fonction du temps (loi horaire) sur l'intervalle $\mathrm{t}\in[0{,}2]$:

$$\mathrm{x}(\mathrm{t})=2-2\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}-\mathrm{te}^{-3\mathrm{t}}$$

1.10. Tracer le plus précisément possible la courbe représentative de la fonction du temps (loi horaire) sur l'intervalle $\mathrm{t}\in[0,\pi]$

$$\mathrm{f}(\mathrm{t})=\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}.\sin(3\mathrm{t})$$

1.11. Calculer la valeur de l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-4\mathrm{t}} dt$$

1.12. Calculer la valeur de l'intégrale suivante :

$$\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\theta d\theta$$

1.13. Déterminer en fonction de a et x réels strictement positifs :

$$\mathrm{F(x)} = \int_0^x e^{at} sin(t) dt$$

1.14. Déterminer en fonction de a réel strictement positif :

$$\mathrm{G(a)} = \lim_{\mathrm{x}\to+\infty} \int_0^x t.e^{-at} dt$$

2. Calculs sur les transformées de Laplace

La transformée de Laplace est un outil qui permet de manipuler assez simplement les systèmes linéaires continus invariants (SLCI) modélisé par des systèmes d'équations linéaires à coefficients constants. Le but des exercices suivants est de se familiariser avec les écritures temporelles ou dans le domaine de Laplace des entrées, sorties et fonctions de transfert des SLCI.

2.1. En précisant les propriétés et résultats employés, exprimer les transformées de Laplace des fonctions du temps suivantes :

2.1.1. $\mathrm{x(t) = 0{,}5}$

2.1.2. $\mathrm{z(t) = e^{-3t}}$

2.1.3. $\mathrm{s(t) = 0{,}5.t + e^{-3t} + 4}$

2.1.4. $\mathrm{y(t) = 2t.e^{-3t}}$

2.1.5. $\mathrm{e(t) = 2.\sin(2t)}$

2.1.6. $\mathrm{v(t) = k.\sin(\omega t + \varphi)}$

2.1.7. $\mathrm{\omega(t) = Ke^{-2t}.\sin(3t + 1) + 1}$

2.1.8. $\theta\mathrm{(t) = (1 + \sin 3t)^2}$

2.1.9. $\mathrm{\varphi(t) = t^2 + 3.t}$

2.2. En précisant les théorèmes employés, écrire les transformées de Laplace des équations différentielles suivantes, en supposant les **conditions initiales nulles**. Exprimer les fonctions de transfert $H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}$ correspondante :

2.2.1. $3.s(t)+\ddot{s}(t)-3.e(t)=0$

2.2.2. $k.(e(t)-s(t))=M.\ddot{s}(t)$

2.2.3. $3.\dddot{s}(t)+\ddot{s}(t)+\dot{s}(t)+s(t)-3.e(t)+\dot{e}(t)=0$

2.3. Déterminer les fonctions du temps dont les transformées de Laplace sont les suivantes :

2.3.1. $S_1(p)=\frac{1}{3p+2}$

2.3.2. $S_2(p)=\frac{p+3}{3p+2}$

2.3.3. $S_3(p)=\frac{p+3}{p^2+2p+2}$

2.3.4. $S_4(p)=\frac{p+3}{p^2+2p+1}$

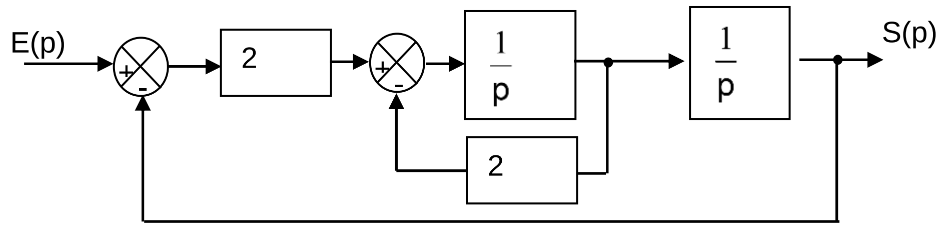
3. Proposer un schéma bloc

du système linéaire d'entrée e(t) et de sortie s(t), faisant apparaitre les transformée de Laplace des fonctions du temps E(p), Y(p), ε(p) et S(p), vérifiant le système d'équation suivant :

$$\begin{cases}-3.s(t)+y(t)=2.\dot{s}(t)\\ y(t)=k.\varepsilon(t)\\ \varepsilon(t)=e(t)-2.s(t)\end{cases}$$

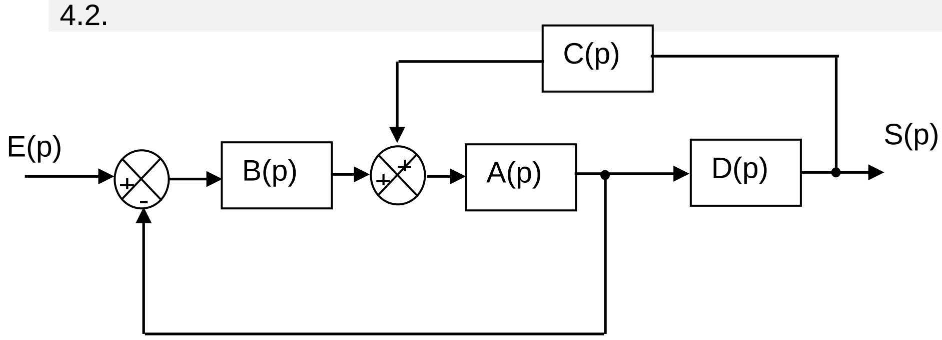
4. Simplification de schéma blocs

4.1.



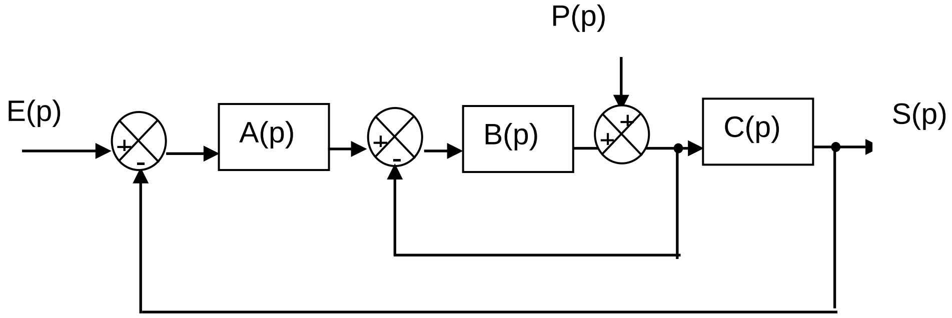
Donner, la fonction de transfert $\frac{S(p)}{E(p)}$ en simplifiant le schéma-bloc

4.2.



Donner, la fonction de transfert $\frac{S(p)}{E(p)}$ en simplifiant le schéma-bloc

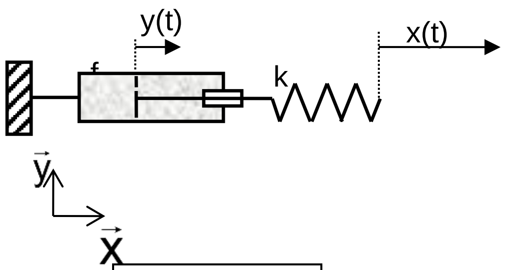
4.3. Soit le schéma-bloc ci-dessous :

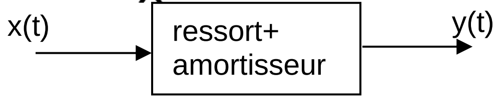


Déterminer S(p) en fonction de A(p), B(p), C(p), E(p) et P(p) en simplifiant le schéma-bloc

5. Exemples de Systèmes physiques simples Linéaires Continus Invariants (SLCI)

5.1. ressort + amortisseur





- variation de position de l'extrémité du ressort x(t) prise comme entrée.
- variation de position du piston y(t) prise comme sortie.
- x(t) et y(t) : positions par rapport à l'équilibre.
- $x(t) \rangle y(t)$.
- masses négligées (pesanteur et quantités d'accélération négligée)
- k est la raideur du ressort (en $N.m^{-1}$)
- f est le coefficient de frottement visqueux (en $N.m^{-1}.s$)

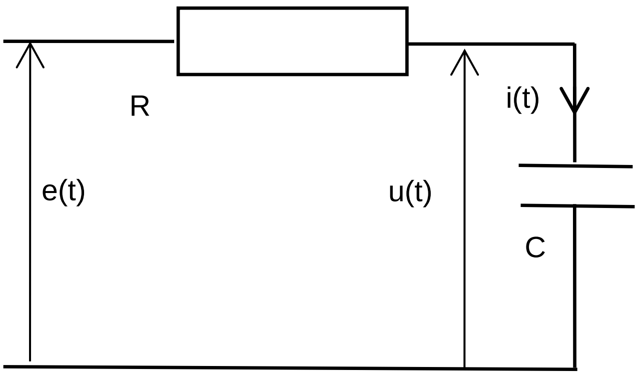
Par application du PFD à l'ensemble piston+ressort on peut déterminer l'équation différentielle linéaire à coefficients constants (SLCI) en faisant apparaître l'entrée dans le premier membre et la sortie dans le second membre : $-f.\dot{y}(t) + k.(x(t) - y(t)) = 0$

Q1. Appliquer la transformation de Laplace à cette équation en utilisant les théorèmes de linéarité et de la dérivée.

Q2. Déterminer la fonction de transfert de ce système. La mettre sous forme canonique.

Q3. Déterminer la réponse à un échelon unitaire de ce système (réponse indicielle). Représenter son allure et commenter.

5.2. circuit RC (résistance + condensateur)



Hypothèses :

- tension e(t) prise comme entrée.
- tension u(t) prise comme sortie.
- e(0)=u(0)=0 et i(0)=0.

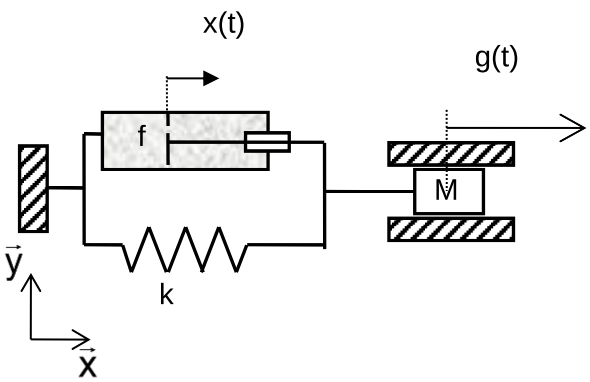
Q4. Par application de la loi des mailles et de la loi d'Ohm on peut déterminer l'équation différentielle linéaire à coefficients constants (SLCI) en faisant apparaître l'entrée dans le premier membre et la sortie dans le second membre : $e(t) = R.C.\dot{u}(t) + u(t)$

Q5. Appliquer la transformation de Laplace à cette équation en utilisant les théorèmes de linéarité et de la dérivée.

Q6. Déterminer la fonction de transfert de ce système. La mettre sous forme canonique.

Q7. Déterminer la réponse à un échelon unitaire de ce système (réponse indicielle). Représenter son allure et commenter.

5.3. masse + ressort + amortisseur



Hypothèses :

- la force g(t) est prise comme entrée.
- la position, par rapport à l'équilibre, x(t) prise comme sortie.
- k est la raideur du ressort (en $N.m^{-1}$)
- f est le coefficient de frottement visqueux (en $N.m^{-1}.s$)
- M est une masse (en kg)
- La verticale ascendante est y

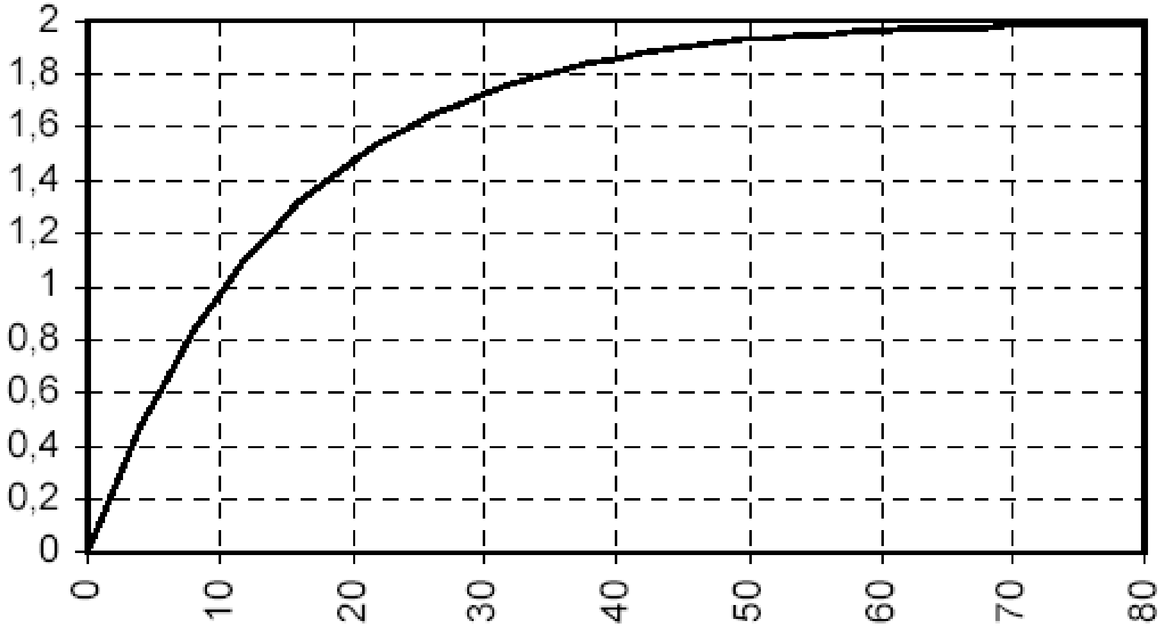
Par application du PFD appliqué à la masse M en projection sur l'axe x, on peut déterminer l'équation différentielle linéaire à coefficients constants (SLCI) en faisant apparaître l'entrée dans le premier membre et la sortie dans le second membre : $g(t) - f.\dot{x}(t) - k.x(t) = M.\ddot{x}(t)$

Avec : $k = 10000 N.m^{-1}$; $M = 100 kg$; $f = 4000 N.m^{-1}.s$

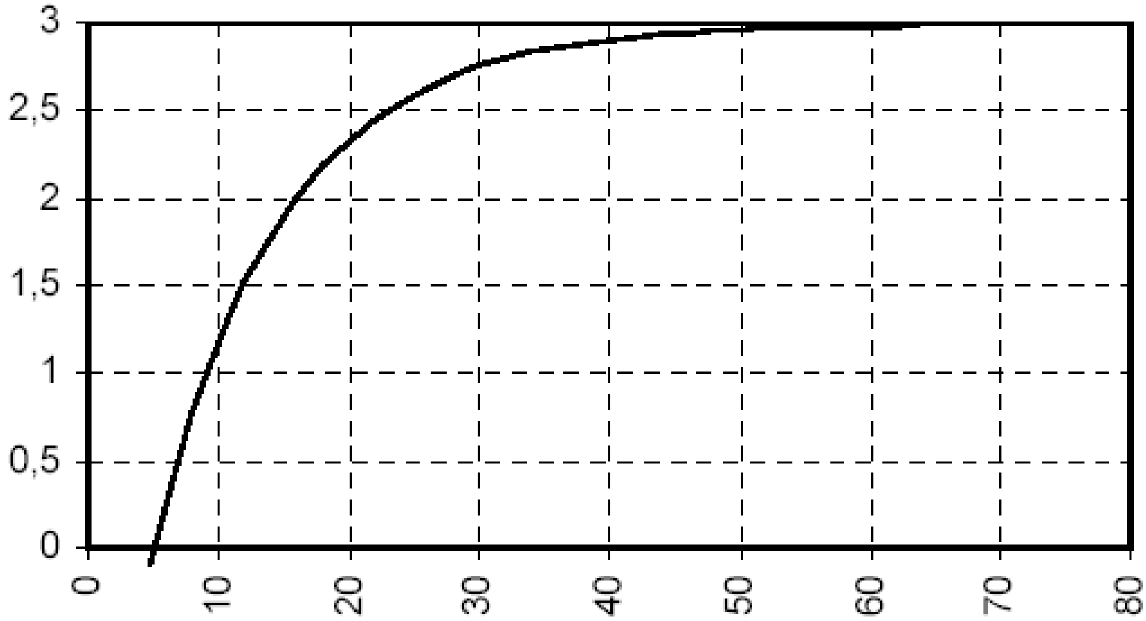
Q1. Appliquer la transformation de Laplace à cette équation en utilisant les théorèmes de linéarité et de la dérivée.
Q2. Déterminer la fonction de transfert de ce système. La mettre sous forme canonique.
Q3. Déterminer la réponse à un échelon unitaire de ce système (réponse indicielle). Représenter son allure et commenter.

6. Identifier les fonctions de transfert des systèmes dont les réponses à un échelon unitaire sont :

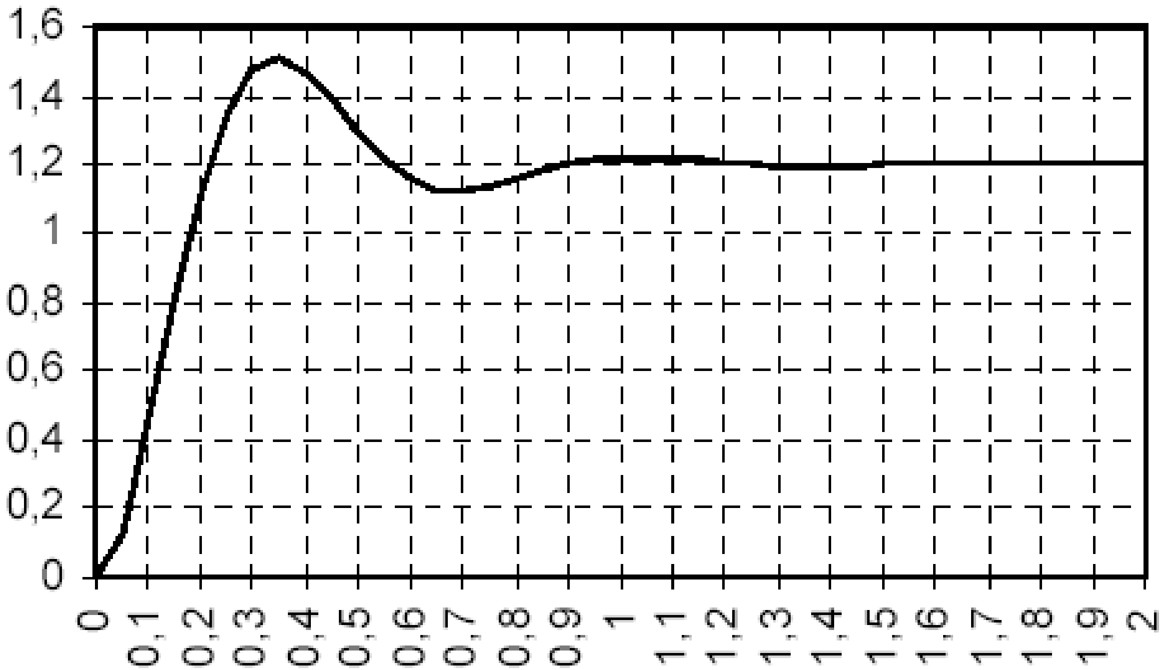
6.1.



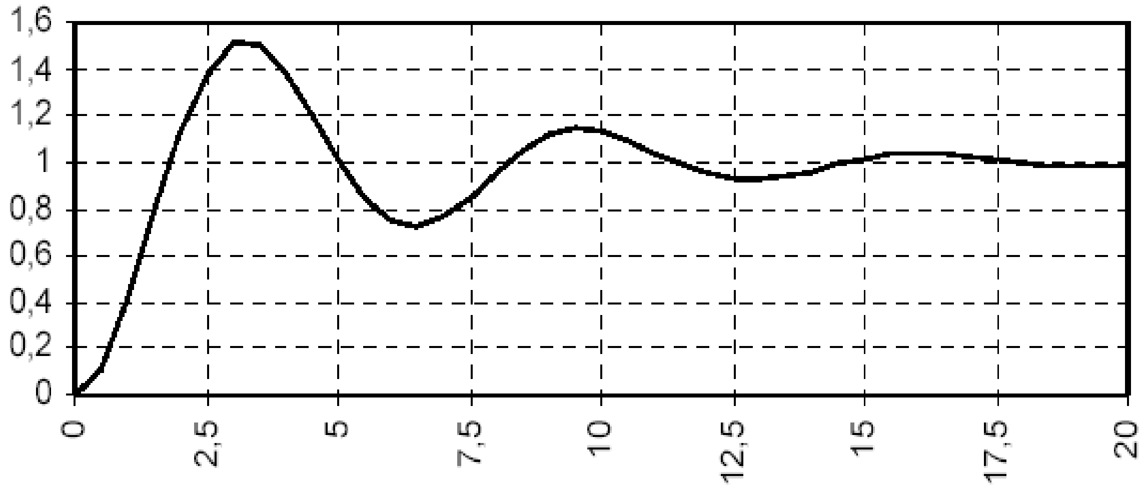
6.2.



6.3.


1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8 1,9 2

6.4.


1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0 2,5 5 7,5 10 12,5 15 17,5 20