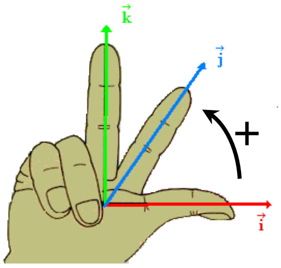
LE PRODUIT VECTORIEL

1. A QUOI CA SERT EN SII ?

C'est l'outil de calcul qui va nous permettre de caractériser les mouvements à l'aide de champs de vecteur dans l'espace orienté.
Pour orienter les mouvements, il faut définir un sens positif et un sens négatif de rotation dans l'espace.
Pour cela on peut s'appuyer sur la définition d'un trièdre direct (3 doigts de la main droite).
Un mouvement de rotation d'un objet dans un repère donné d'observation sera caractérisé par un axe de rotation (par exemple dirigé par $\vec{k}$), une vitesse de rotation (par exemple 3 tr/min soit $6\pi\,rad.s^{-1}$) et un sens de rotation de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$ ou de $\vec{j}$ vers $\vec{i}$.



les sens de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$, $\vec{j}$ vers $\vec{k}$ et $\vec{k}$ vers $\vec{i}$ sont positifs.

2. DEFINITION GEOMETRIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.|\sin(\vec{u},\vec{v})|.\vec{w}$$

Avec $\vec{w}$ unitaire, $\vec{u} \perp \vec{w}$, $\vec{v} \perp \vec{w}$ et tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit un trièdre direct.

Exemple : sur le trièdre orthonormé ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

$\vec{i} \wedge \vec{j} =$

$\vec{k} \wedge \vec{j} =$

$\vec{i} \wedge \vec{k} =$

3. PROPRIETES DU PRODUIT VECTORIEL

Antisymétrie : $\vec{u} \wedge \vec{v} =$

Distributif par rapport à l'addition et compatible avec la multiplication par un scalaire :

$$\vec{u} \wedge (\lambda_1.\vec{v}_1 + \lambda_2.\vec{v}_2) =$$

4. DEFINITION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

Si les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont données dans une même base de projection, alors on peut exprimer les coordonnées du résultat $\vec{w}$ de leur produit vectoriel :

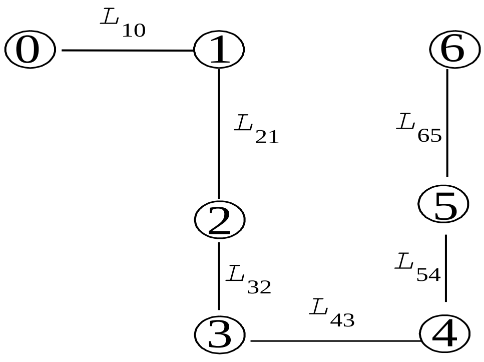
Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ alors $\boxed{\vec{w} = \begin{pmatrix} u_y.v_z - u_z.v_y \\ u_z.v_x - u_x.v_z \\ u_x.v_y - u_y.v_x \end{pmatrix}}$

THEOREMES DE DERIVATION VECTORIELLE

1. PARAMETRAGE ANGULAIRE D'UN MECANISME

On définit un mécanisme par un ensemble de solides i en mouvements relatifs par un graphe de liaisons.

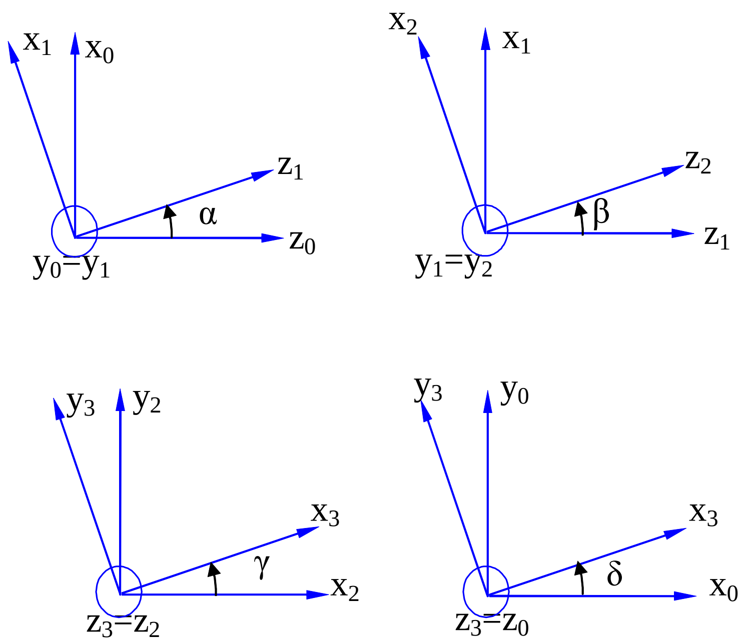
Exemple :



On associe généralement à chaque solide i un repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ orthonormé direct

On représente ainsi les orientations des solides par les figures planes (figures de calcul) représentant les rotations planes des bases orthonormées directes les unes par rapport aux autres.

Exemple :



2. DERIVEE D'UN VECTEUR UNITAIRE

2.1. Théorème

Soit $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en mouvement par rapport à $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0} = \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{x}_1}$$

où $\vec{\Omega}_{R1/R0}$ représente le vecteur (vitesse de) rotation de la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par rapport à la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

2.2. Démonstration

Elle s'appuie sur le fait qu'un vecteur unitaire a une norme constante égale à 1 et peut être considéré appartenant à une base orthonormée directe.

On note

$$\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0} = a_{xx}\vec{x}_1 + a_{xy}\vec{y}_1 + a_{xz}\vec{z}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{/R0} = a_{yx}\vec{x}_1 + a_{yy}\vec{y}_1 + a_{yz}\vec{z}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_{/R0} = a_{zx}\vec{x}_1 + a_{zy}\vec{y}_1 + a_{zz}\vec{z}_1$$

$R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est un repère orthonormé direct, ce qui implique :

$$\vec{x}_1.\vec{x}_1 = 1; \vec{y}_1.\vec{y}_1 = 1; \vec{z}_1.\vec{z}_1 = 1$$
$$\vec{x}_1.\vec{y}_1 = 0; \vec{x}_1.\vec{z}_1 = 0; \vec{y}_1.\vec{z}_1 = 0$$

par dérivation de ces relations on obtient :

$$\begin{cases} \left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{x}_1 = 0 \\ \left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{y}_1 = 0 \\ \left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{z}_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{y}_1 + \left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{x}_1 = 0 \\ \left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{z}_1 + \left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{x}_1 = 0 \\ \left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{z}_1 + \left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{y}_1 = 0 \end{cases}$$

en utilisant les composantes des dérivées des vecteurs dans la base de projection associée à $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ces relations deviennent :

$$\begin{cases} a_{xx} = 0 \\ a_{yy} = 0 \\ a_{zz} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{xy} + a_{yx} = 0 \\ a_{xz} + a_{zx} = 0 \\ a_{yz} + a_{zy} = 0 \end{cases}$$

on peut alors exprimer les dérivée vectorielles à partir des 3 paramètres a_{xy}, a_{xz} et a_{yz} :

$$\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0} = a_{xy}\,\vec{y}_1 + a_{xz}\,\vec{z}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{/R0} = -a_{xy}\,\vec{x}_1 + a_{yz}\,\vec{z}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_{/R0} = -a_{xz}\,\vec{x}_1 - a_{yz}\,\vec{y}_1$$

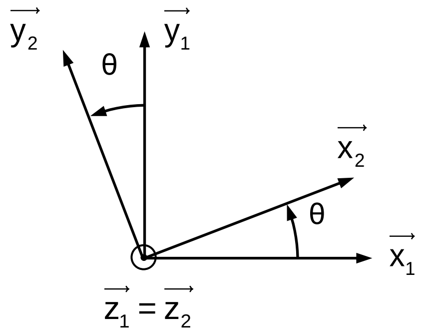
On peut exprimer ce résultat à l'aide des produits vectoriels suivants :

$$\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0} = \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{x}_1 \qquad \text{avec} \qquad \vec{\Omega}_{R1/R0} = -a_{yz}\,\vec{x}_1 + a_{xz}\,\vec{y}_1 + a_{xy}\,\vec{z}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{/R0} = \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{y}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_{/R0} = \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{z}_1$$

2.3. Cas particulier de la rotation plane :



Alors

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{R2/R1} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_1}}$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{x_2} = \cos\theta\overrightarrow{x_1} + \sin\theta\overrightarrow{y_1} \Rightarrow \left(\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_{R1} = -\dot{\theta}\sin\theta\overrightarrow{x_1} + \dot{\theta}\cos\theta\overrightarrow{y_1} = \dot{\theta}\ \cos\theta\overrightarrow{y_1} - \sin\theta\overrightarrow{x_1}$$

$$\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_{R1} = \dot{\theta}\overrightarrow{y_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{x_2}}$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right)_{R1} = \frac{d}{dt}\ \cos\theta\overrightarrow{y_1} - \sin\theta\overrightarrow{x_1} = -\dot{\theta}\sin\theta\overrightarrow{y_1} - \dot{\theta}\cos\theta\overrightarrow{x_1} = -\dot{\theta}\ \sin\theta\overrightarrow{y_1} + \cos\theta\overrightarrow{x_1} \quad \boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right)_{R1} = -\dot{\theta}\overrightarrow{x_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{y_2}}$$

et $\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right)_{R1} = \vec{0}}$ car $\overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_1} \quad \Rightarrow \overrightarrow{\Omega}_{R2/R1} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_2}$

2.4. dérivée d'un vecteur quelconque

Soit $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en mouvement par rapport à $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{/R0} = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{/R1} + \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{U}}$$

démonstration
On note
$\vec{U} = a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 + c\vec{z}_1$

On a alors :

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{/R0} = \dot{a}\vec{x}_1 + a\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0} + \dot{b}\vec{y}_1 + b\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{/R0} + \dot{c}\vec{z}_1 + c\left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_{/R0}$$

d'après le premier théorème :

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{/R0} = \dot{a}\vec{x}_1 + \dot{b}\vec{y}_1 + \dot{c}\vec{z}_1 + a\,\vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{x}_1 + b\,\vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{y}_1 + c\,\vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{z}_1$$

soit $$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{/R0} = \dot{a}\vec{x}_1 + \dot{b}\vec{y}_1 + \dot{c}\vec{z}_1 + \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \left(a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 + c\vec{z}_1\right)$$

d'où $$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{/R0} = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{/R1} + \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{U}$$