

NOM :

CORRIGE

Prenom :

/99

+2

| DATE | | | HEURE DÉBUT | HEURE FIN |
|------|----|------|-------------|-----------|
| 30 | 11 | 2024 | 8h10 | 10h40 |

| | |
|--------|------|
| CLASSE | MPSI |
|--------|------|

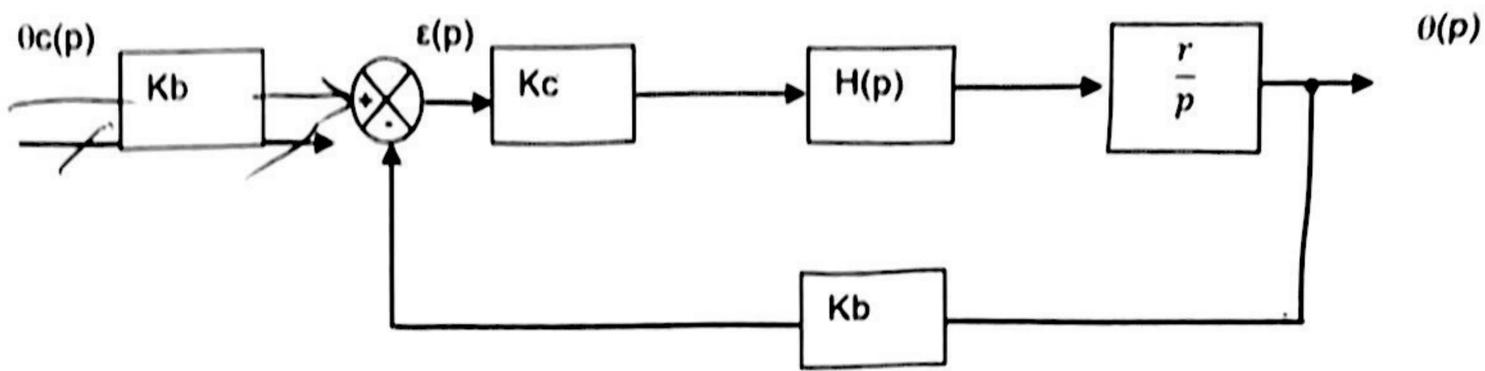
| | |
|---------|----|
| MATIERE | SI |
|---------|----|

| | |
|------------|---------------|
| PROFESSEUR | LILLONI (169) |
|------------|---------------|

| | | | | | |
|------------------|---|-----|-------------------------------------|-----|-------------------------------------|
| CONSIGNES | Calculatrice | OUI | <input checked="" type="checkbox"/> | NON | <input type="checkbox"/> |
| | Documents | OUI | <input type="checkbox"/> | NON | <input checked="" type="checkbox"/> |
| | <p><u>Autres consignes :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Pas de téléphone sinon exclusion immédiate. - Vous devez répondre directement et uniquement sur le document réponse fourni. - Vous attacherez la plus grande importance à la propreté, à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. - Il est conseillé d'utiliser des feuilles de papier brouillon afin de mettre au point les développements mathématiques, schémas, graphes et courbes. - Les résultats attendus seront obligatoirement encadrés. | | | | |

Partie 1 : Exercice et questions de cours SLCI 18

Le schéma bloc d'un asservissement de position d'une roue de chariot robotisé est représenté ci-dessous :



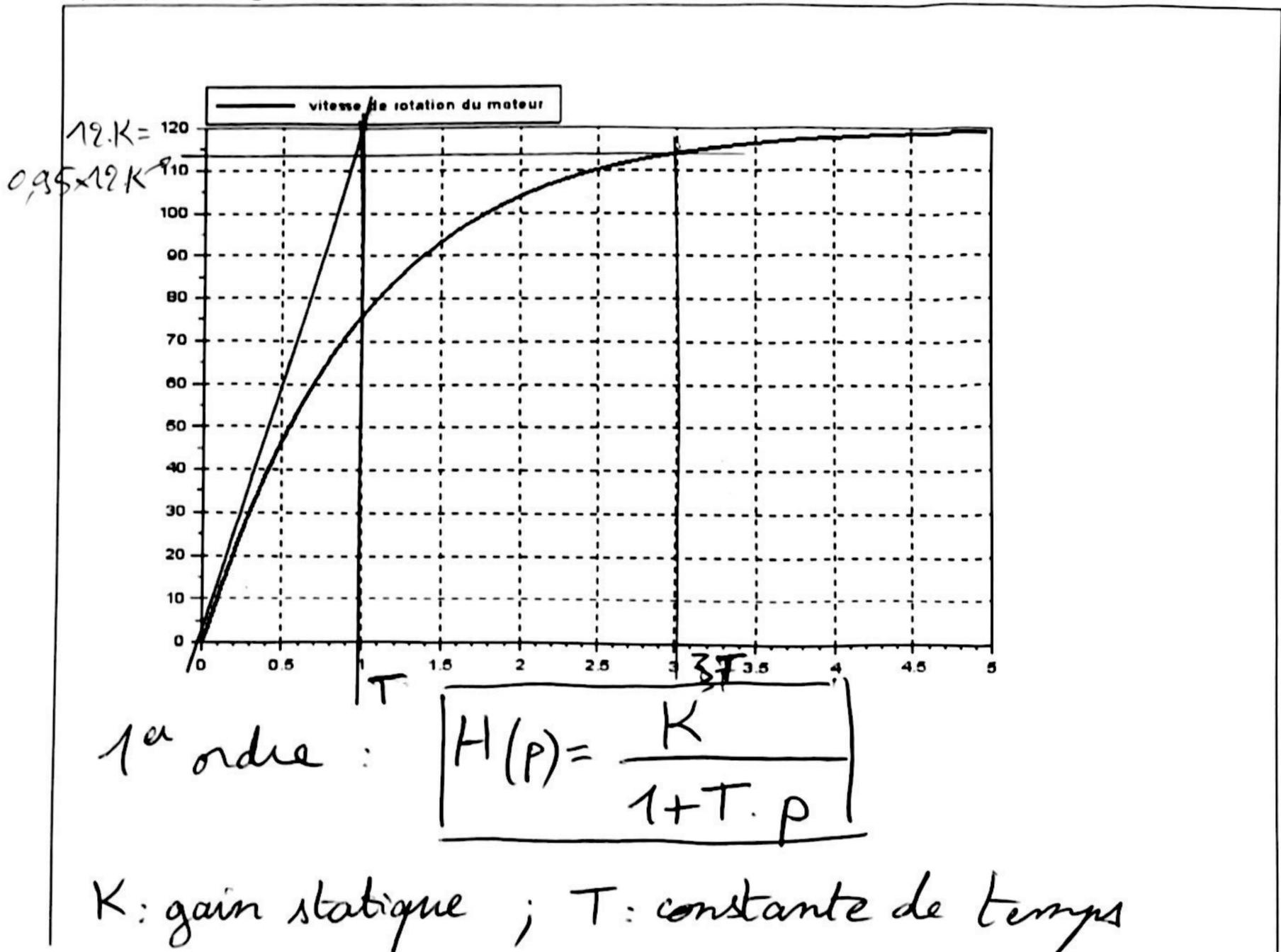
K_c est le gain du correcteur réglable

$r=0,1$ est le rapport de réduction du réducteur à engrenage

$K_b=1V/(rad)$ est le gain du capteur de position angulaire de rotation de la roue

On veut déterminer un modèle de comportement du moteur de fonction de transfert $H(p)$. On fait un essai expérimental sur le moteur alimenté par un échelon de 12V et on représente l'évolution de la vitesse de rotation du moteur (en rad/s) en fonction du temps (en s) sur le document réponse.

1. A quel type de fonction de transfert cela correspond ? Donner la forme canonique $H(p)$ du cours correspondante. Nommer les paramètres canoniques. Exprimer l'évolution de vitesse théorique associée $\omega(t)$. Déterminer les valeurs numériques des paramètres canoniques. Les faire apparaître sur le tracé fourni (asymptote, tangente, $tr5\%$, ...)



$$\omega(t) = 12 \cdot K (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

$$K = \frac{120}{12} = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{V}^{-1}$$

$$T = 1 \text{ s} \quad \left(\frac{12K}{T} \text{ pente à l'origine; temps de réponse à } 63\% = T; \text{ temps de réponse à } 5\% = 3T \right)$$

2

2. Rappeler la formule de Black du cours avec A(p) et B(p) en proposant le schéma bouclé correspondant. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée H_r(p) de l'asservissement de position sous forme littérale puis sous forme numérique (seules les notations K_c et la variable de Laplace p restent). La mettre sous la forme canonique du second ordre et déterminer les paramètres canoniques (2 des 3 paramètres canoniques dépendent de K_c).

Formule de Black :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$$H_r(p) = K_b \cdot \frac{K_c \cdot H(p) \cdot \frac{r}{p}}{1 + K_c \cdot H(p) \cdot \frac{r}{p} K_b} = \frac{K_b \cdot 0,1 \cdot K_c K}{p(1 + T \cdot p)} = \frac{K_c}{p(1 + p)}$$

$$= \frac{K_c}{1 + \frac{K_c}{p(1 + p)}}$$

Sous forme canonique

$$H_r(p) = \frac{K_c}{K_c + p + T p^2} = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_c} + \frac{T p^2}{K_c}} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_0}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Paramètres canoniques :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_c}{T}} = \sqrt{K_c} \text{ en rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\xi = \frac{\omega_0}{2 \cdot K_c} = \frac{1}{2 \sqrt{K_c}} \text{ sans unité}$$

gain statique = 1 sans unité

2

NOM :

Prénom :

Le Cahier des Charges Fonctionnelles (CdCF) partiel de l'asservissement de position considéré est :

| performance | critère | niveau |
|---------------|------------------------|-----------------------------|
| rapidité | Temps de réponse à 5% | 0,7s |
| précision | Ecart statique relatif | 2% d'une consigne constante |
| amortissement | Dépassement | 5% maxi |

3. Rappeler le théorème de la valeur finale. Déterminer d'après le schéma bloc de l'asservissement de position l'expression de $\epsilon(p)$ pour une entrée échelon telle que $\theta_c(p) = \frac{1}{p}$. Déterminer l'écart statique de position ϵ_s . Conclure sur la performance de précision.

théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p X(p)$$

$$\epsilon(p) = K_b \theta_c(p) - K_b \theta(p) = K_b (\theta_c(p) - \theta(p))$$

$$\text{ou } \theta(p) = H_f(p) = \theta_c(p)$$

$$\text{d'où } \epsilon(p) = K_b \theta_c(p) (1 - H_f(p))$$

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \epsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} K_b \frac{1}{p} (1 - H_f(p)) \times p$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} K_b \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{p}{K_c} + \frac{Tp^2}{K_c}} \right) = \boxed{0 = \epsilon_s}$$

conclusion sur la précision :

$\epsilon_s = 0$ donc le système est parfaitement précis

8

4. Rappeler l'expression du premier dépassement relatif D_1 pour un second ordre. Déterminer la condition sur la valeur de K_c permettant de respecter le critère d'amortissement

$$D_1 = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\text{on veut } D_1 \leq 5\% \Rightarrow D_1 \leq 0,05$$

$$e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq 0,05 \Rightarrow \xi \geq \sqrt{\frac{(\ln D_1)^2}{\pi^2 + (\ln D_1)^2}}$$

$$\text{or } \xi = \frac{1}{2\sqrt{K_c}}$$

$$\text{donc } K_c \leq \frac{1}{4} \frac{\pi^2 + (\ln D_1)^2}{(\ln D_1)^2}$$

Condition sur K_c :

$$K_c \leq 0,51$$

②

Partie 2 : Etude d'une servocommande d'hélicoptère

1/14 (+2)



PRESENTATION.

L'étude proposée porte sur un des mécanismes de commande de l'orientation des pales du rotor d'un hélicoptère.

Pour déplacer un hélicoptère, son pilote agit sur le manche de pas cyclique et sur le levier de pas collectif. Ces ordres sont transmis par l'intermédiaire d'une tringlerie aux servocommandes (voir figure 1).

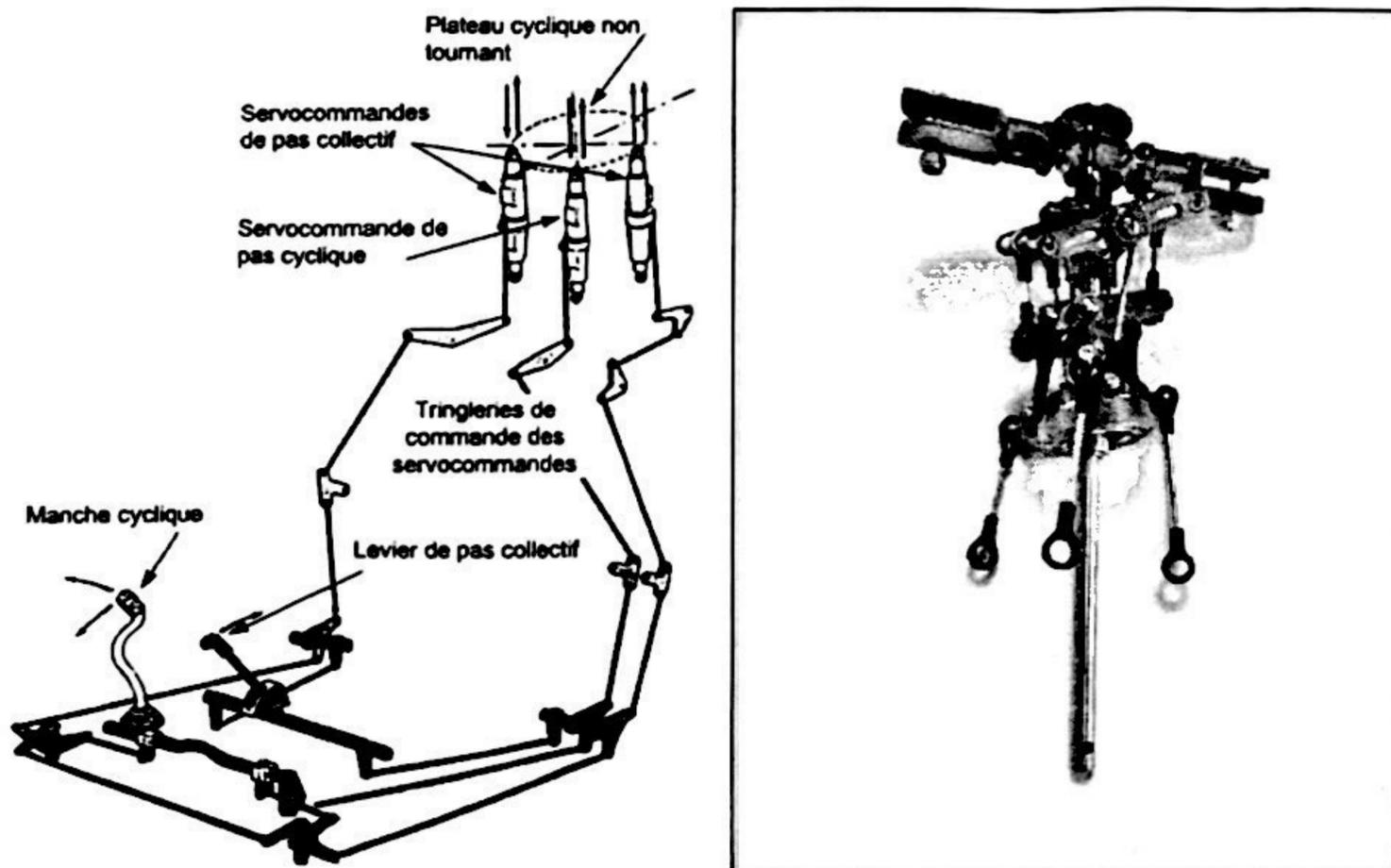


Figure 1 - Tringlerie de transmission et mécanisme de commande d'orientation des pales du rotor d'un hélicoptère

1. Modélisation de la servocommande.

La servocommande utilisée est un système d'asservissement en position, à entrée mécanique. Elle est composée d'un distributeur à tiroir pilotant un vérin à corps mobile (voir figure 2).

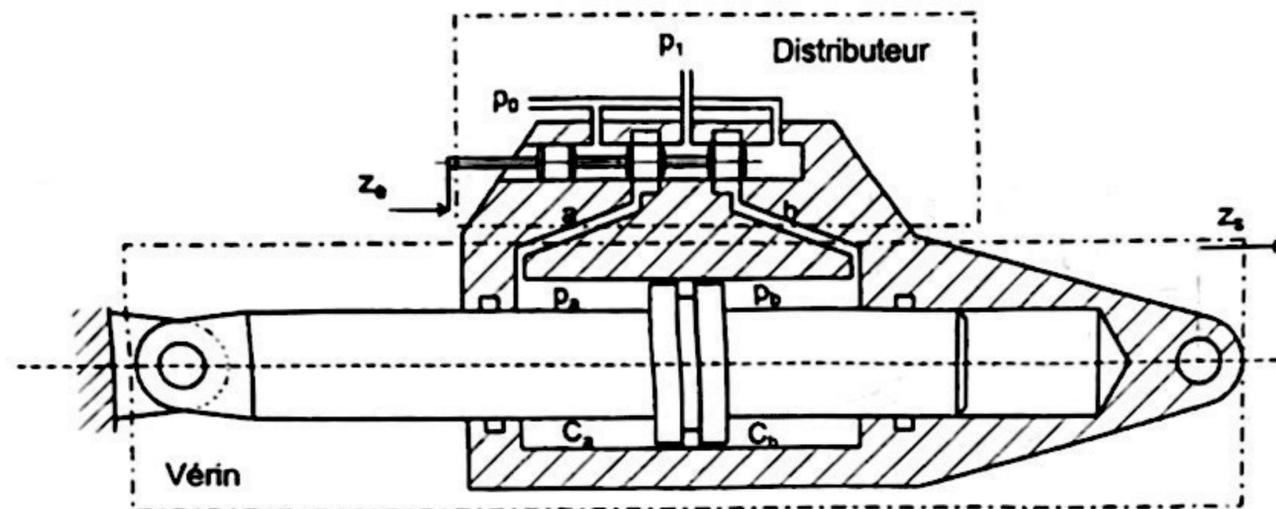


Figure 2 - Distributeur à tiroir pilotant et vérin à corps mobile

Le tiroir du distributeur reçoit la consigne z_e . Celle-ci provient de la tringlerie de commande. Ce tiroir coulisse dans le corps du distributeur et met en communication chacune des deux conduites a et b avec la pression d'alimentation p_1 ou la pression de retour p_0 .

Les deux chambres C_a et C_b sont alimentées avec deux pressions différentes, ce qui a pour conséquence de déplacer le corps et générer la sortie z_s .

- $z_e(t)$ la consigne d'entrée
- $z_s(t)$ la réponse en sortie
- $p_1(t)$ la pression d'alimentation
- $p_0(t)$ la pression de retour
- $p_a(t)$ et $p_b(t)$ les pressions dans les chambres C_a et C_b de volumes V_a et V_b
- $V_t = (V_a + V_b)/2$
- rc, f et m la raideur, le coefficient de frottement visqueux et la masse de l'ensemble vérin plus charge
- K_d le gain du distributeur;
- B le module de compressibilité de l'huile;
- S la section utile du vérin.

On montre que le fonctionnement de la servocommande est modélisé par les équations suivantes :

a - équation de débit :

$$K_d \cdot (z_e(t) - z_s(t)) = S \cdot \frac{dz_s(t)}{dt} + \frac{V_t}{2B} \cdot \frac{d(p_a(t) - p_b(t))}{dt} \quad (1)$$

b - équation de dynamique appliquée au corps de vérin :

$$(p_a(t) - p_b(t)) \cdot S = rc \cdot z_s(t) + f \cdot \frac{dz_s(t)}{dt} + m \cdot \frac{d^2 z_s(t)}{dt^2} \quad (2)$$

NOM :

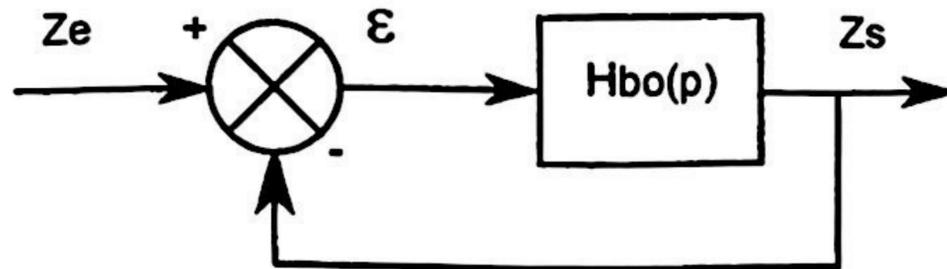
Prenom :

Question 2.1 : Ecrire l'image de chaque équation (1) et (2) par la transformation de Laplace en considérant que toutes les conditions initiales sont nulles.

$$(1) K_d [z_e(p) - z_s(p)] = s \cdot p z_s(p) + \frac{v_t}{2B} p (P_a(p) - P_b(p))$$

$$(2) (P_a(p) - P_b(p)) s = (r_c + f \cdot p + m \cdot p^2) z_s(p)$$

2. Boucle ouverte de la servocommande.



Question 2.2 : D'après les équations précédentes, déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte, $H_{bo}(p)$, de la chaîne fonctionnelle représentée ci-dessus. En posant $r_h = \frac{2 \cdot B \cdot s^2}{v_t}$ et $\omega = \frac{K_d}{s}$, exprimer $H_{bo}(p)$ en fonction de r_c , r_h , f , m et ω .

NB : Cette question est difficile. Si vous n'y arrivez pas. Pas de panique. Vous pouvez passer à la question 2.4.

$$(2) P_a(p) - P_b(p) = \frac{r_c + f \cdot p + m \cdot p^2}{s} z_s(p)$$

et par substitution dans (1) :

$$K_d [z_e(p) - z_s(p)] = s p z_s(p) + \frac{v_t}{2B} p \frac{r_c + f \cdot p + m \cdot p^2}{s} z_s(p)$$

en utilisant r_h et ω on a :

$$z_e(p) - z_s(p) = \frac{p}{\omega} z_s(p) + \frac{1}{r_h \cdot \omega} (r_c \cdot p + f \cdot p^2 + m p^3) z_s(p)$$

d'où
$$H_{bo}(p) = \frac{\omega}{p \left(1 + \frac{r_c}{r_h} + \frac{f}{r_h} \cdot p + \frac{m}{r_h} p^2 \right)}$$

Question 2.3 : Mette sous forme canonique cette fonction de transfert et faire l'application numérique avec les données suivantes : $r_c = r_h = 2 \cdot 10^7$ N/m ; $f = 10^5$ N.s/m ; $m = 250$ kg ; $\omega = 200$ rd/s

$$H_{bo}(p) = \frac{100}{p \left(1 + 2,5 \cdot 10^{-3} p + 0,695 \cdot 10^{-5} p^2 \right)}$$

Dans le domaine fréquentiel d'utilisation de ce système, comme $\frac{m}{rh}$ est très petit devant 1, $H_{bo}(p)$ peut se mettre sous la forme :

$$H_{bo}(p) = \frac{100}{p(1 + 2,5 \cdot 10^{-3}p)}$$

(On considérera cette expression pour les questions 2.4 et 2.5.)

Question 2.4 : A l'aide de la $H_{bo}(p)$ et de la chaîne fonctionnelle représentée précédemment, déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{bf}(p)$ du système ayant Z_e en entrée et Z_s en sortie. Mettre $H_{bf}(p)$ sous une forme canonique et préciser les valeurs du gain statique, de la pulsation propre et du coefficient d'amortissement.

$$H_{bf}(p) = \frac{Z_s(p)}{Z_e(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{H_{bo}(p)}}$$

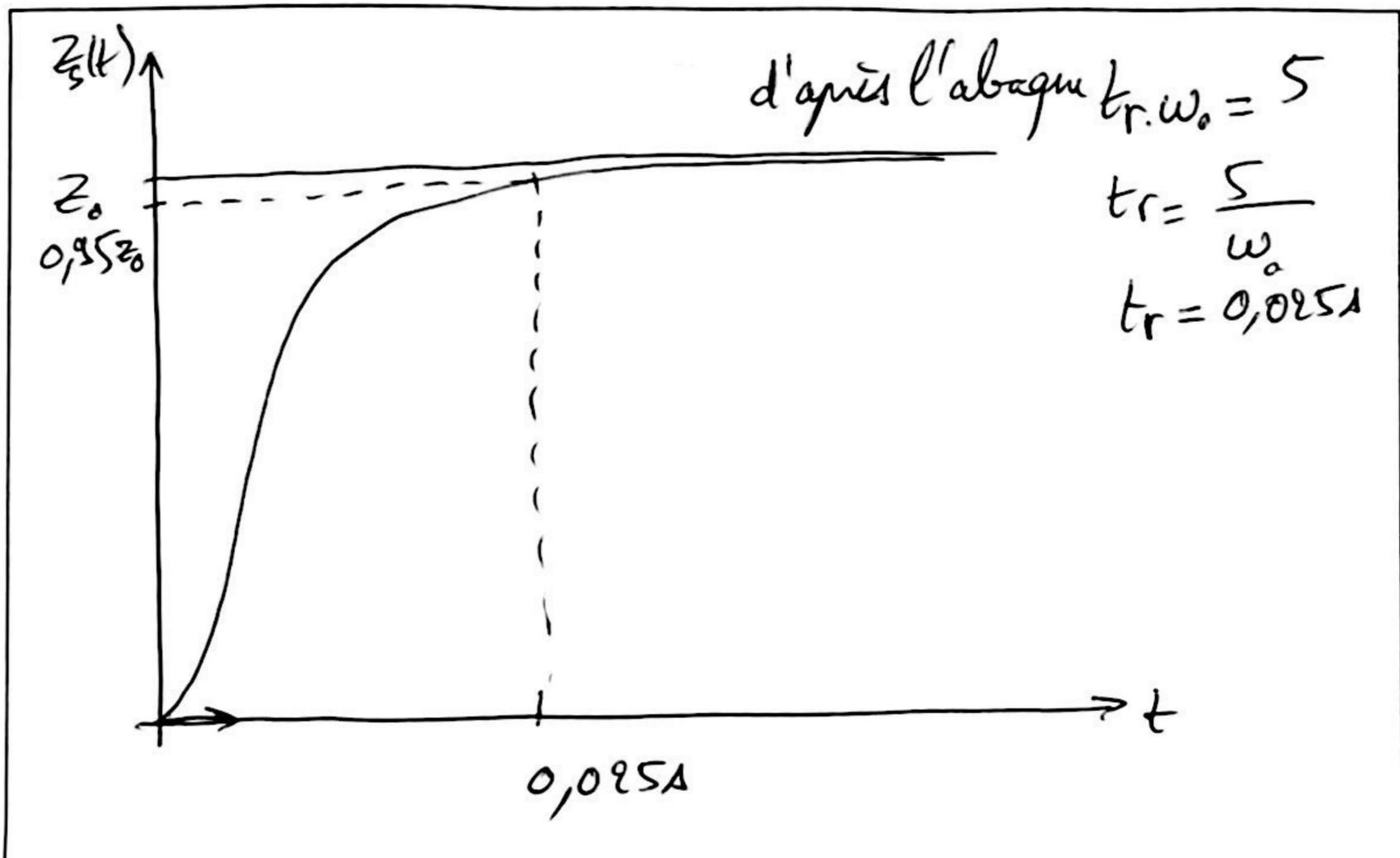
$$H_{bf}(p) = \frac{\frac{100}{p(1 + 2,5 \cdot 10^{-3}p)}}{1 + \frac{100}{p(1 + 2,5 \cdot 10^{-3}p)}} = \frac{1}{1 + \frac{p}{100} + 2,5 \cdot 10^{-5}p^2}$$

$$H_{bf}(p) = \frac{1}{2 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$K = 1$ $\omega_0 = 200 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ $z = 1$

2

Question 2.5 : Tracer l'allure de la courbe représentative de la réponse du système modélisé par $H_{bf}(p)$ à un échelon d'amplitude Z_0 , en précisant la valeur du dépassement maximum éventuel, de l'écart statique et du temps de réponse à 5%. (voir ANNEXE).

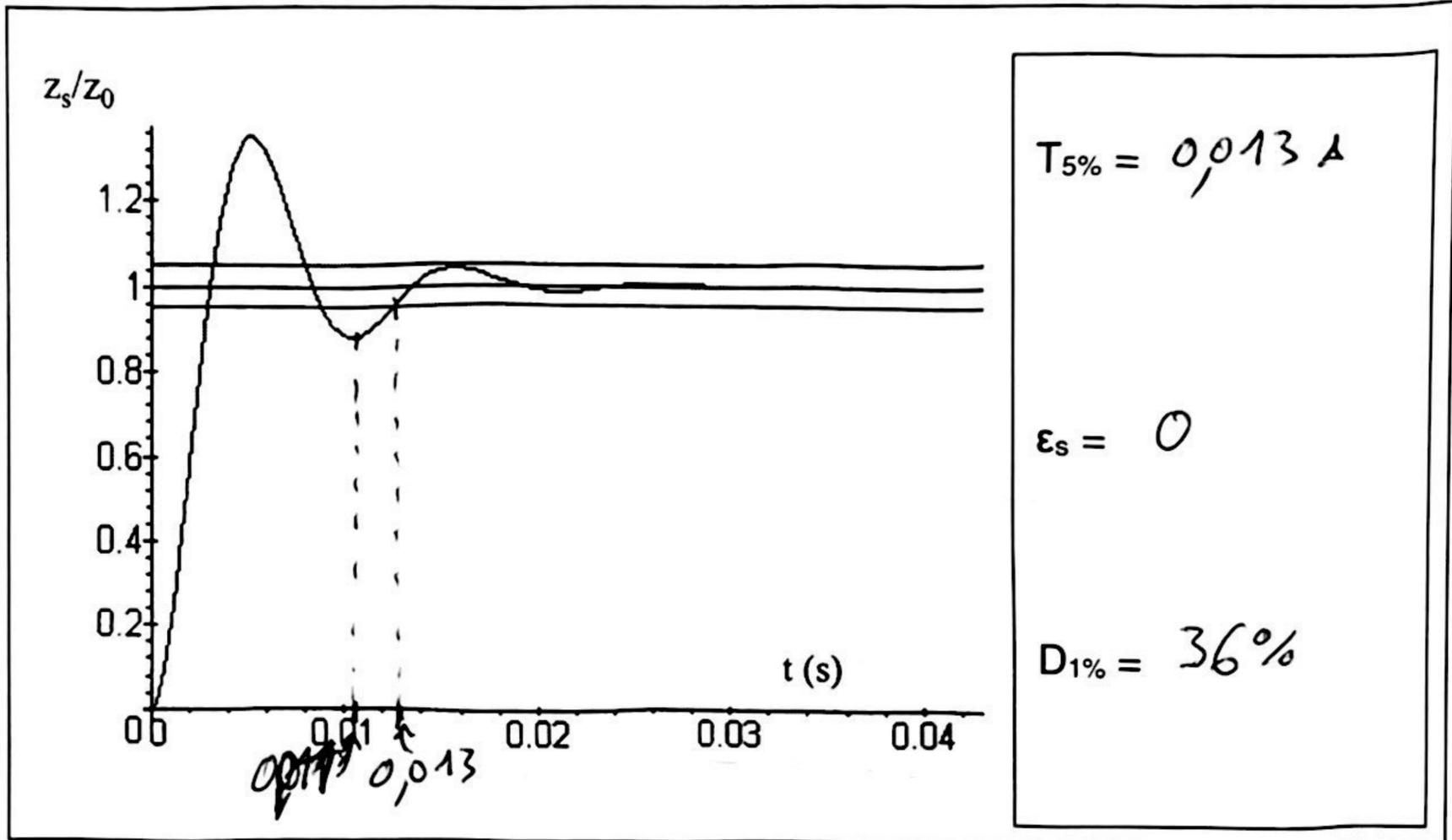


1

NOM :

Prenom :

Question 2.6 : Pour améliorer les performances du système, on a augmenté le gain de la boucle ouverte. Le tracé de la réponse est donné ci-dessous. Trouver par lecture sur cette courbe : le temps de réponse à 5%; l'écart statique; le dépassement maximum (en pourcentage de la valeur finale).



Question 2.7 : En déduire la forme canonique de la fonction de transfert correspondant au tracé et identifier les paramètres caractéristiques associés (gain statique, facteur d'amortissement ζ (ou ξ) et pulsation propre ω_0) par la méthode de votre choix (voir annexe si-besoin).

$z_s \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} z_0 \Rightarrow K = 1 \text{ sans unité}$
 $D_1 = 0,36 \text{ donc } \zeta = \sqrt{\frac{(\ln D_1)^2}{\pi^2 + (\ln D_1)^2}} = 0,3 \text{ ou avec l'abaque}$
 $T = \frac{\varepsilon \pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\varepsilon \pi}{T \sqrt{1 - \zeta^2}} \text{ avec } T = 0,011 \text{ s}$
 ou avec l'abaque $\zeta = 0,3 \Rightarrow tr \cdot \omega_0 \approx 8 \Rightarrow \omega_0 = \frac{8}{tr}$

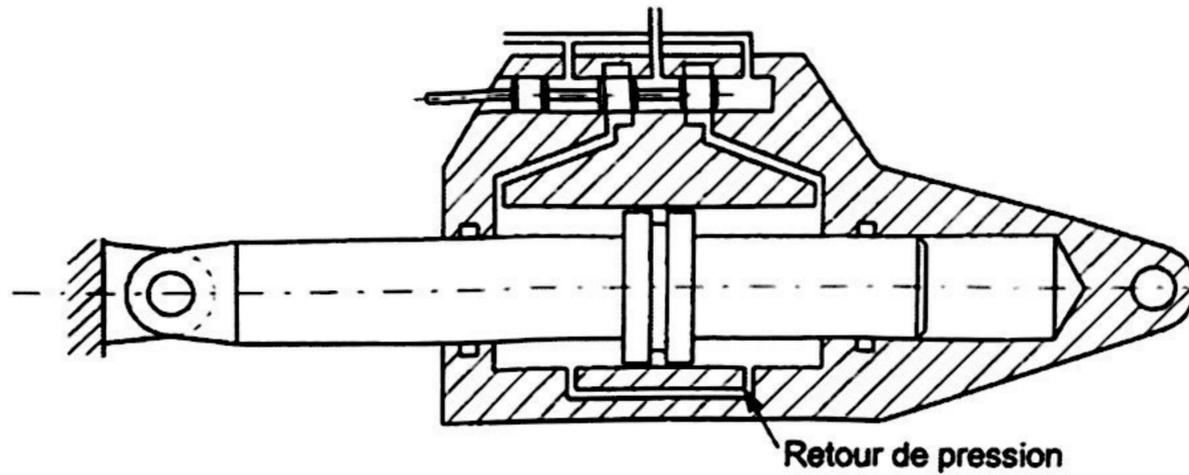
$K = 1$
 $\omega_0 = 615 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
 $\zeta = 0,3$

Question 2.8 : Quelles sont les conséquences de l'augmentation du gain sur le comportement du système (performances) ?

- améliore la rapidité
- diminue l'amortissement
- pas d'effet sur la précision.

3. Influence d'un dispositif de correction.

La servocommande est munie d'un dispositif de correction dit « à retour de pression ». Voir figure ci-dessous.



Ce dispositif est constitué d'une canalisation de petite section qui relie les deux chambres du vérin. Il permet de « compenser » le débit d'huile introduit par le distributeur au cours d'un dépassement de position (oscillation).

La fonction de transfert en boucle ouverte du système devient : $H_{bo}(p) = \frac{2 \cdot 10^5}{(400 + p) \cdot (500 + p) + p}$

L'entrée du système est l'échelon $z_e = z_0 \cdot u(t)$, où $u(t)$ est la fonction échelon unitaire et $z_0 \in \mathbb{R}^+$.

Question 2.9 : Déterminer l'expression de l'écart dans le domaine de Laplace : $\varepsilon(p) = Z_e(p) - Z_s(p)$, puis l'écart statique $\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} [z_e(t) - z_s(t)]$.

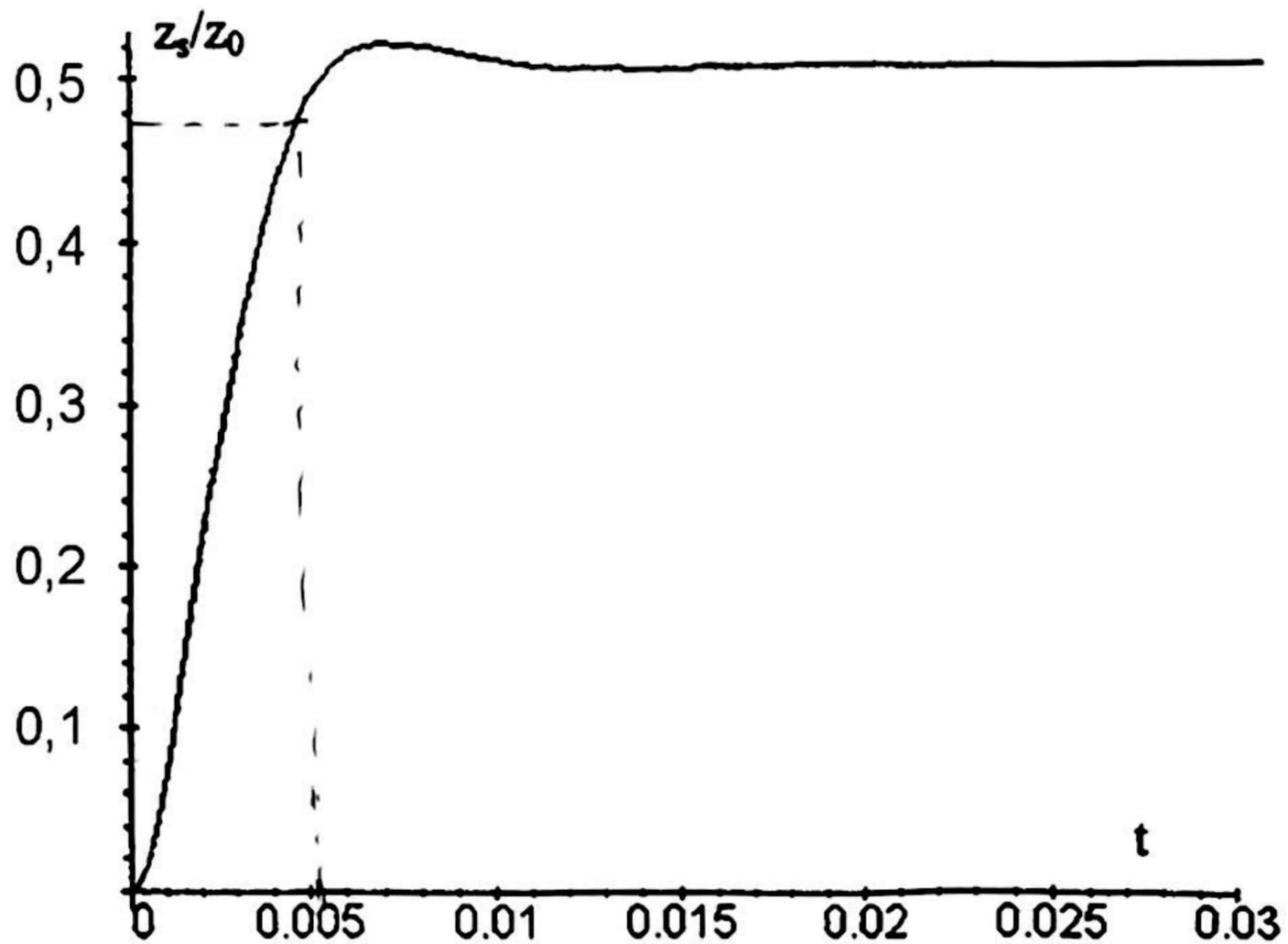
$$\varepsilon(p) = Z_e(p) - Z_s(p) = (1 - H_{bo}(p)) Z_e(p) = \frac{1}{1 + H_{bo}(p)} Z_e(p)$$

$$Z_e(p) = \frac{z_0}{p} \Rightarrow \left. \varepsilon(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 10^5}{(400 + p)(500 + p) + p}} \cdot \frac{z_0}{p} \right\}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{z_0}{1 + \frac{2 \cdot 10^5}{400 \cdot 500}} = \boxed{\frac{z_0}{2} = \varepsilon_s}$$

Question 2.10 : La réponse à un échelon $z_e = z_0 \cdot u(t)$ du système corrigé est représentée ci-après. Quels sont les avantages et inconvénients du système de correction utilisé ? (NB : qualitatif et quantitatif)

dépassement de 4% \Rightarrow amélioration de l'amortissement
 $t_{r5\%} = 0,005 \text{ s}$ \Rightarrow amélioration de la rapidité
 $\varepsilon_{5\%} = 50\%$ \Rightarrow dégradation de la précision



Réponse à un échelon avec dispositif de correction (question 2.10)

Question 2.11 : Déterminer l'expression temporelle de la réponse du système modélisé aux questions 2.4 et 2.5.

$$H_{bf}(p) = \frac{4 \cdot 10^4}{(p + 200)^2} \quad \text{avec} \quad Z_e(p) = \frac{Z_0}{p}$$

$$Z_s(p) = \frac{4 \cdot 10^4 \cdot Z_0}{p(p + 200)^2} = Z_0 \left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p + 200} + \frac{\gamma}{(p + 200)^2} \right)$$

on détermine $\alpha = 1$; $\beta = -1$; $\gamma = -200$ par
identification

$$Z_s(t) = Z_0 (1 - e^{-200t} - 200te^{-200t})$$

(+2)

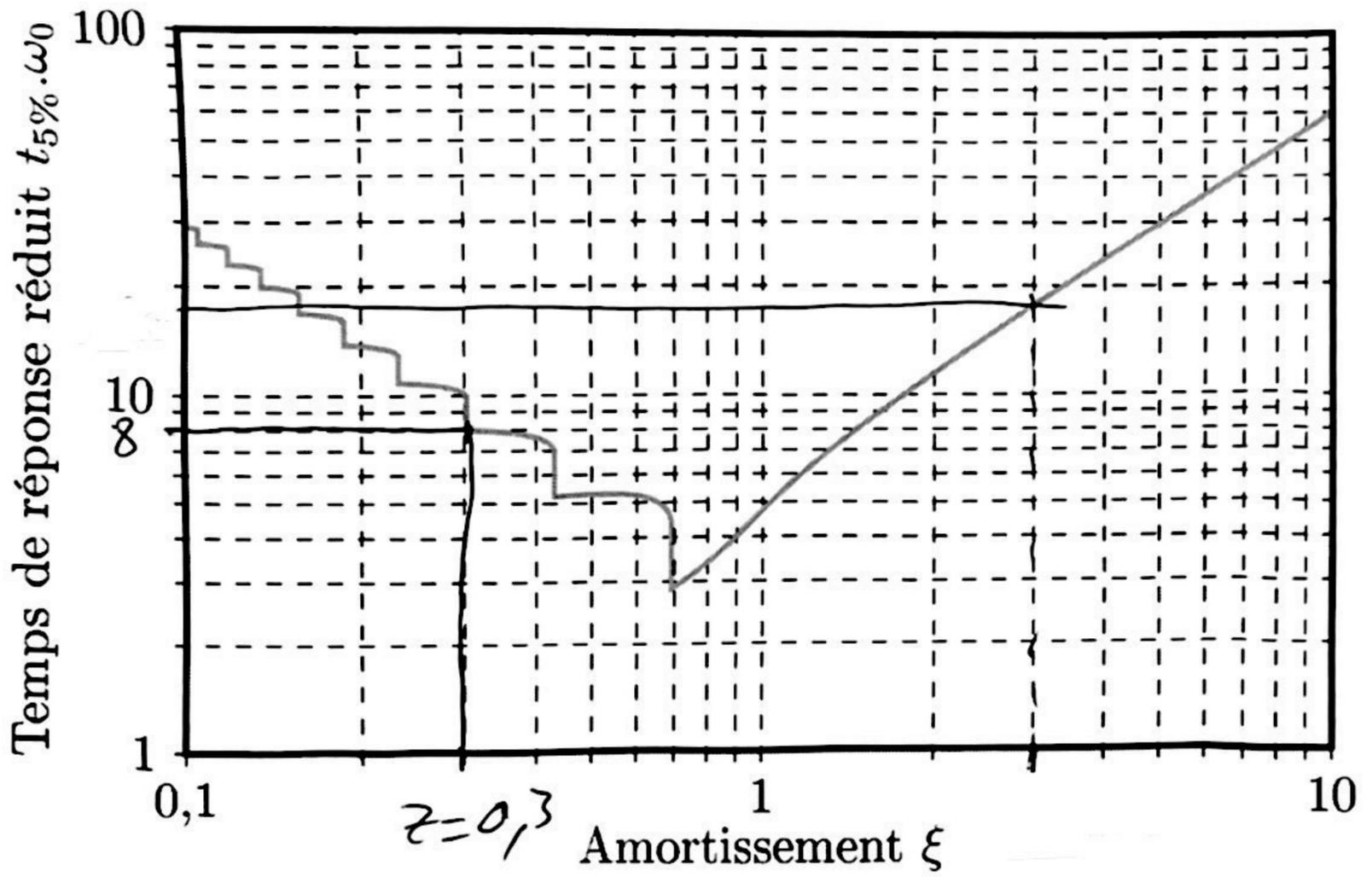


FIGURE 3 - Abaque des temps de réponse

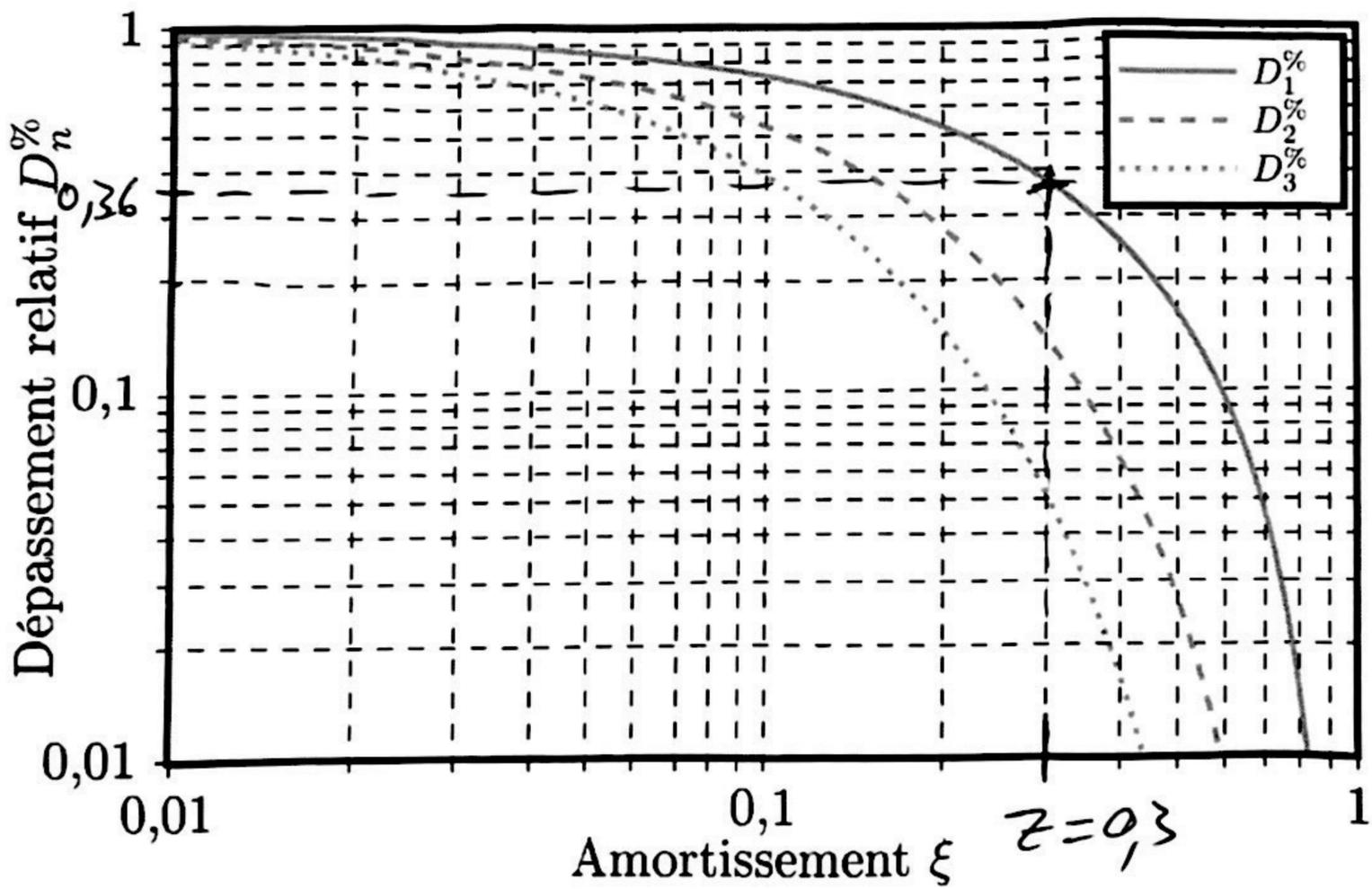


FIGURE 4 - Abaque des dépassements