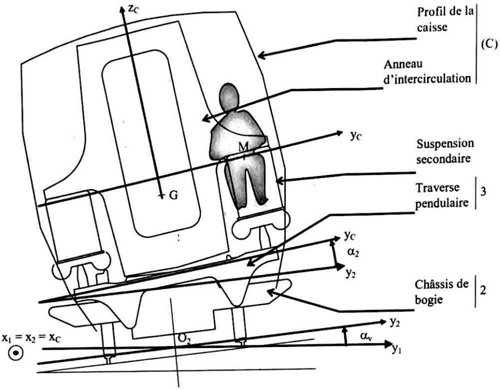
NOM : CORRIGE

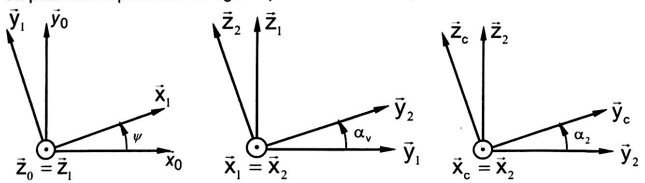
Interrogation

TGV PENDULAIRE



On considère le point M repérant la position du passager dans le train.
On associe le repère R0 $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ au sol (repère non représenté sur la figure)
On associe le repère R1 $(O_2,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ aux rails 1 situés sous la voiture du train suivant l'angle de lacet de la voie.
On associe le repère R2 $(O_2,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ au châssis de bogie 2 incliné en roulis par le devers de voie
On associe le repère Rc $(G,\vec{x}_c,\vec{y}_c,\vec{z}_c)$ à la traverse pendulaire 3 inclinée d'un angle de roulis par le système étudié précédemment par rapport au châssis.

On peut alors représenter les figures planes suivantes représentant les 3 orientations variables



On considère que la traverse tourne autour de G grâce au mécanisme de pendulation et on paramètre alors la position du passager à l'aide des vecteurs :
$\overrightarrow{OO_2} = R\vec{y}_1$; $\overrightarrow{O_2G} = z_G\vec{z}_2$ et $\overrightarrow{GM} = z_M\vec{z}_c + y_M\vec{y}_c$
Où z_M, y_M, z_G, R **sont des constantes**

NOM : Interrogation

Question 1 : Donner la définition géométrique du produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ puis du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$ 0,5

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \, |\sin(\vec{u},\vec{v})| \, \vec{w}$ 1

$\vec{w} \perp \vec{u}$
$\vec{w} \perp \vec{v}$
$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ direct
$\|\vec{w}\| = 1$ 0,5

2

Question 2 : Exprimer la propriété d'antisymétrie du produit vectoriel

$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ 1

1

Question 3 : Exprimer $\vec{x}_1$ et $\vec{z}_2$ dans la base liée à 0. Exprimer $\vec{y}_1.\vec{x}_0$ et $\vec{y}_2.\vec{x}_0$ en fonction des angles utiles.

$\vec{x}_1 = \cos\psi \, \vec{x}_0 + \sin\psi \, \vec{y}_0$ 0,5

$\vec{z}_2 = \cos\alpha_v \vec{z}_1 - \sin\alpha_v \vec{y}_1 = \cos\alpha_v \vec{z}_0 - \sin\alpha_v \cos\psi \vec{y}_0 + \sin\alpha_v \sin\psi \vec{x}_0$ 1,5

$\vec{y}_1.\vec{x}_0 = -\sin\psi$ 0,5

$\vec{y}_2.\vec{x}_0 = -\cos\alpha_v.\sin\psi$ 0,5

3

Question 4 : Exprimer en fonction des angles et des vecteurs unitaires utiles les produits :

$\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_0 = -\cos\psi \, \vec{z}_0$ 1,5

$\vec{y}_2 \wedge \vec{y}_1 = -\sin\alpha_v \, \vec{x}_1$ 1,5

3

Question 5 : Exprimer les vecteurs vitesse de rotation associés aux 3 figures :

$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\psi} \, \vec{z}_1$; $\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\alpha}_v \, \vec{x}_{a}$; $\vec{\Omega}_{3/2} = \dot{\alpha}_e \, \vec{x}_e$

1

NOM : Interrogation

Question 6 : Ecrire le théorème de dérivation vectoriel utilisant $\vec{\Omega}_{1/0}$

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt_{/0}} = \ldots \overrightarrow{\Omega 1/0} \wedge \vec{x}_1$$

1

Question 7 : Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(G/1) = \vec{V}(G/R_1) = \frac{d\overrightarrow{O_2G}}{dt_{/R_1}}$.

$$\vec{V}(G/1) = z_G \frac{d\vec{z}_2}{dt_{/R_1}} = z_G \overrightarrow{\Omega 2/1} \wedge \vec{z}_2$$

$$= z_G \dot{\alpha}_v \vec{x}_2 \wedge \vec{z}_2$$

$$\boxed{\vec{V}(G/1) = -z_G \dot{\alpha}_v \vec{y}_2}$$

2

Question 8 : Donner sa norme pour $z_G = 1,4m$ et $\dot{\alpha}_v = 1,5 rad/s$

$$\|\vec{V}(G/1)\| = 2,1 \; m.s^{-1}$$

1

Question 9 : Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(G/0)=\vec{V}(G/R_0)=\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt_{/R_0}}$.

$$\vec{V}(G/0)=\vec{V}(G/R_0)=\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt_{/R_0}} = \frac{d}{dt_{/0}}\left(\overrightarrow{OO_2}+\overrightarrow{O_2G}\right) = R\frac{d\vec{y_1}}{dt_{/0}} + z_G\frac{d\vec{z_2}}{dt_{/0}}$$ 1

1

$$\frac{d\vec{y_1}}{dt_{/0}} = \vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{y_1} = \dot\psi\,\vec{z_1}\wedge\vec{y_1} = -\dot\psi\,\vec{x_1}$$

$$\frac{d\vec{z_2}}{dt_{/0}} = \vec{\Omega}_{2/0}\wedge\vec{z_2} = -\dot\alpha_v\,\vec{y_2} + \dot\psi\,\vec{z_1}\wedge\vec{z_2} = -\dot\alpha_v\,\vec{y_2} + \dot\psi\sin\alpha_v\,\vec{x_1}$$

$$\vec{V}(G/0) = (-R+z_G\sin\alpha_v)\,\dot\psi\,\vec{x_1} - z_G\,\dot\alpha_v\,\vec{y_2}$$ 1

3

Question 10 : Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}(G/0)=\frac{d\vec{V}(G/0)}{dt_{/R_0}}$.

1

$$\frac{d\vec{x_1}}{dt_{/0}} = \vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{x_1} = \dot\psi\,\vec{y_1}$$

$$\frac{d\vec{y_2}}{dt_{/0}} = \vec{\Omega}_{2/0}\wedge\vec{y_2} = \left(\dot\psi\,\vec{z_1}+\dot\alpha_v\,\vec{x_2}\right)\wedge\vec{y_2} = -\dot\psi\cos\alpha_v\,\vec{x_2} + \dot\alpha_v\,\vec{z_2}$$

1

$$\vec{a}(G/0) = z_G\,\dot\alpha_v\cos\alpha_v\,\dot\psi\,\vec{x_1} + (-R+z_G\sin\alpha_v)\,\ddot\psi\,\vec{x_1} + (-R+z_G\sin\alpha_v)\,\dot\psi^2\,\vec{y_1}$$
$$- z_G\,\ddot\alpha_v\,\vec{y_2} - z_G\,\dot\alpha_v\left(-\dot\psi\cos\alpha_v\,\vec{x_2} + \dot\alpha_v\,\vec{z_2}\right)$$

$$\boxed{\vec{a}(G/0) = 2\,z_G\cos\alpha_v\,\dot\alpha_v\,\dot\psi\,\vec{x_2} + (-R+z_G\sin\alpha)\,\ddot\psi\,\vec{x_1} + (-R+z_G\sin\alpha_v)\,\dot\psi^2\,\vec{y_1} - z_G\,\ddot\alpha_v\,\vec{y_2} - z_G\,\dot\alpha^2\,\vec{z_2}}$$

3

1