

MELANGEUR

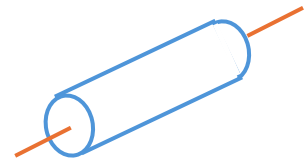
Question 1: Donner le schéma cinématique et la forme du torseur d'une liaison sphérique de centre B. Quel est son autre nom ?

$$\{V(S_i / S_j)\} = \begin{Bmatrix} p_{ij} & 0 \\ q_{ij} & 0 \\ r_{ij} & 0 \end{Bmatrix}_B \quad \text{Quelle que soit la base de projection}$$



L'autre nom de cette liaison étant liaison rotule de centre B

Question 2: Donner les schémas cinématiques plan et 3D et la forme du torseur d'une liaison pivot glissant d'axe $(B, \vec{z}_2)$.



$$\{V(S_i / S_j)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{ij} & w_{ij} \end{Bmatrix}_B \quad \text{uniquement dans une base contenant } \vec{z}_2 : (*, *, \vec{z}_2)$$

Question 3: Déterminer par calcul la liaison équivalente à l'association en série d'un liaison sphérique en B entre 1 et 2 et d'un liaison pivot glissant d'axe $(B, \vec{z}_2)$ entre 2 et 3. On écrira tout d'abord les torseurs cinématiques associés à chacune des 2 liaisons.

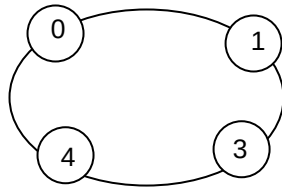
$$\{V(1/2)\} = \begin{Bmatrix} p_{12} & 0 \\ q_{12} & 0 \\ r_{12} & 0 \end{Bmatrix}_B \quad \text{et} \quad \{V(2/3)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{23} & w_{23} \end{Bmatrix}_B$$

En utilisant les question 1 et 2 il vient donc directement, sans changement de base ni de point nécessaire :

$$\{V(1/3)\} = \{V(1/2)\} + \{V(2/3)\} = \begin{Bmatrix} p_{12} & 0 \\ q_{12} & 0 \\ r_{12} + r_{23} & w_{23} \end{Bmatrix}_B$$

Ainsi on obtient un torseur cinématique correspondant à celui d'une liaison équivalente linéaire annulaire ou sphère cylindre en B et d'axe $(B, \vec{z}_2)$.

Question 4: Tracer le graphe de liaison du mécanisme en indiquant les noms et caractéristiques géométriques des liaisons.



Liaison	Nom de la liaison
L_{01}	Pivot d'axe $(A, \vec{y}_0)$
L_{31}	Linéaire annulaire ou Sphère Cylindre en B d'axe $(B, \vec{z}_3)$
L_{40}	Pivot d'axe $(C, \vec{z}_4)$
L_{34}	Pivot d'axe $(C, \vec{x}_4)$

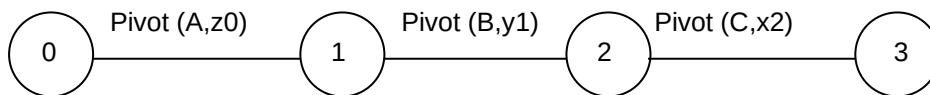
Question 5: Ecrire les torseurs cinématiques associés aux liaisons précédemment déterminées en utilisant les notations ci-dessus.

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ q_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C, B_0 \text{ ou } B_1} \quad \{\mathcal{V}(S_3/S_1)\} = \begin{Bmatrix} p_{31} & 0 \\ q_{31} & 0 \\ r_{31} & w_{31} \end{Bmatrix}_{B, B_3 \text{ ou } B_2}$$

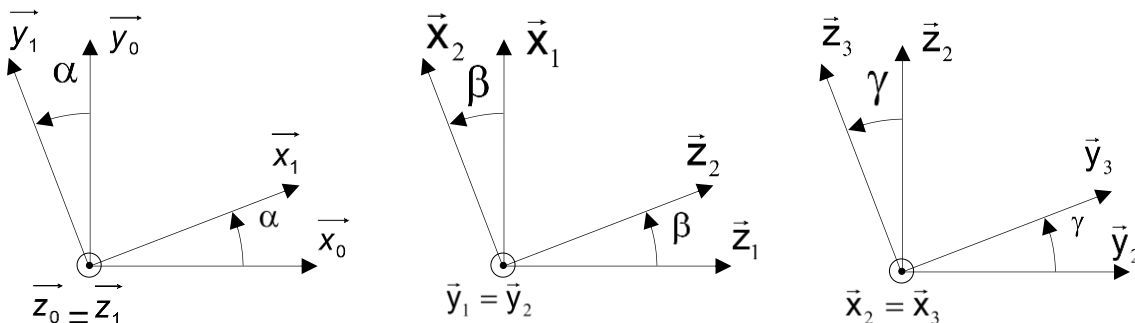
$$\{\mathcal{V}(S_4/S_3)\} = \begin{Bmatrix} p_{43} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C, B_4} \quad \{\mathcal{V}(S_4/S_0)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{40} & 0 \end{Bmatrix}_{C, B_4 \text{ ou } B_0}$$

BRAS MANIPULATEUR

Question 1:



Question 2:



Question 3:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Avec $\vec{w}$ unitaire, $\vec{u} \perp \vec{w}$, $\vec{v} \perp \vec{w}$ et tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit un trièdre direct.

Antisymétrie :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

Distributif par rapport à l'addition et compatible avec la multiplication par un scalaire :

$$\vec{u} \wedge (\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \vec{u} \wedge \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{u} \wedge \vec{v}_2$$

Question 4:

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_0 = -\sin \alpha \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_0 = -\cos \alpha \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{y}_3 \wedge \vec{x}_0 = (\cos \gamma \cdot \vec{y}_2 + \sin \gamma \cdot \vec{z}_2) \wedge \vec{x}_0 = \cos \gamma \cdot \vec{y}_1 \wedge \vec{x}_0 + \sin \gamma \cdot \vec{z}_2 \wedge \vec{x}_0$$

$$\text{or } \vec{z}_2 \wedge \vec{x}_0 = (\cos \beta \cdot \vec{z}_1 + \sin \beta \cdot \vec{x}_1) \wedge \vec{x}_0 = \cos \beta \cdot \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_0 + \sin \beta \cdot \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_0 = \cos \beta \cdot \vec{y}_0 - \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \vec{z}_0$$

$$\text{d'où } \vec{y}_3 \wedge \vec{x}_0 = -\cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \vec{z}_0 + \sin \gamma \cdot (\cos \beta \cdot \vec{y}_0 - \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \vec{z}_0)$$

$$\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_1 = \vec{z}_3 \wedge \vec{y}_2 = -\cos \gamma \cdot \vec{x}_2$$

Question 5:

Par définition :

$$\vec{V}(A, 1/0) = \vec{V}(A/0) - \vec{V}(A/1)$$

Or A est un point matériel fixe par rapport à 0 et à 1 donc : $\vec{V}(A, 1/0) = \vec{0} - \vec{0} = \vec{0}$

Par changement de point :

$$\vec{V}(B, 1/0) = \vec{V}(A, 1/0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -h \cdot \vec{x}_1 \wedge \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = -h \cdot \dot{\alpha} (\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_1)$$

$$\vec{V}(B, 1/0) = h \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1$$

Question 6:

$$\vec{V}(C, 2/0) = \vec{V}(B, 2/0) + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$$

$$\vec{V}(B, 2/0) = \vec{V}(B, 1/0)$$

$$\vec{V}(C, 2/0) = h \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - d \vec{x}_2 \wedge (\dot{\alpha} \vec{z}_1 + \dot{\beta} \vec{y}_2) = h \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 + d \cos \beta \dot{\alpha} \vec{y}_1 - d \dot{\beta} \vec{z}_2$$

$$\vec{V}(C, 2/0) = (h + d \cos \beta) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - d \dot{\beta} \cdot \vec{z}_2$$

Question 7:

$$\vec{V}(D, 3/0) = \vec{V}(C, 3/0) + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}}$$

$$\vec{V}(C, 3/0) = \vec{V}(C, 3/2) + \vec{V}(C, 2/0)$$

$$\frac{d\overrightarrow{CD}}{dt_{/0}} = L \frac{d\vec{y}_3}{dt_{/0}}$$

$$\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = -L \vec{y}_3 \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = -L \vec{y}_3 \wedge (\dot{\alpha} \vec{z}_1 + \dot{\beta} \vec{y}_2 + \dot{\gamma} \vec{x}_2) = -L (\vec{y}_3 \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_1 + \vec{y}_3 \wedge \dot{\beta} \vec{y}_2 + \vec{y}_3 \wedge \dot{\gamma} \vec{x}_2)$$

$$\vec{y}_3 \wedge \vec{z}_1 = (\cos \gamma \vec{y}_2 + \sin \gamma \vec{z}_2) \wedge \vec{z}_1 = -\sin \gamma \sin \beta \vec{y}_1 + \cos \gamma \vec{x}_1$$

$$\vec{y}_3 \wedge \vec{y}_2 = -\sin \gamma \vec{x}_2$$

$$\vec{y}_3 \wedge \vec{x}_2 = -\vec{z}_3$$

$$\vec{V}(D, 3/0) = ((h + d \cos \beta + L \sin \gamma \sin \beta) \vec{y}_1 - L \cos \gamma \vec{x}_1) \cdot \dot{\alpha} + (L \sin \gamma \vec{x}_2 - d \vec{z}_2) \cdot \dot{\beta} + L \dot{\gamma} \vec{z}_3$$

Question 8:

$$\vec{a}(B/0) = \frac{d\vec{V}(B/0)}{dt_{/0}} = \frac{d(h \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1)}{dt_{/0}} = h \cdot \frac{d(\dot{\alpha} \vec{y}_1)}{dt_{/0}} = h \cdot \left(\ddot{\alpha} \vec{y}_1 + \dot{\alpha} \frac{d\vec{y}_1}{dt_{/0}} \right)$$

$$\text{avec } \frac{d\vec{y}_1}{dt_{/0}} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{y}_1 = \dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\alpha} \vec{x}_1$$

$$\vec{a}(B/0) = h \cdot (\ddot{\alpha} \vec{y}_1 + \dot{\alpha}^2 \vec{x}_1)$$

Question 9:

$$\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_0 = \vec{y}_2 \wedge \vec{z}_0 = \vec{y}_1 \wedge \vec{z}_1 = \vec{x}_1$$

$$\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_0 = \vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1 = -\sin\beta \vec{y}_1$$

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_0 = -\vec{y}_1$$

$$\vec{x}_2 \wedge \vec{z}_1 = -\beta \cos\gamma \vec{y}_1$$

$$\vec{z}_3 \wedge \vec{z}_0 = \vec{z}_3 \wedge \vec{z}_1 = (\cos\gamma \vec{z}_2 - \sin\gamma \vec{y}_2) \wedge \vec{z}_1 = -\cos\gamma \sin\beta \vec{y}_1 - \sin\gamma \vec{x}_1$$

$$\begin{aligned} \vec{V}(D,3/0) \wedge \vec{z}_0 = & h.\dot{\alpha}.\vec{x}_1 + d(\dot{\alpha}\cos\beta\vec{x}_1 + \dot{\beta}\sin\beta\vec{y}_1) + L\dot{\alpha}(\cos\gamma\vec{y}_1 + \sin\gamma\sin\beta\vec{x}_1) \\ & - L\dot{\beta}\sin\gamma\cos\beta\vec{y}_1 - L\dot{\gamma}\cos\gamma.\sin\beta\vec{y}_1 - L\dot{\gamma}\sin\gamma.\vec{x}_1 \end{aligned}$$

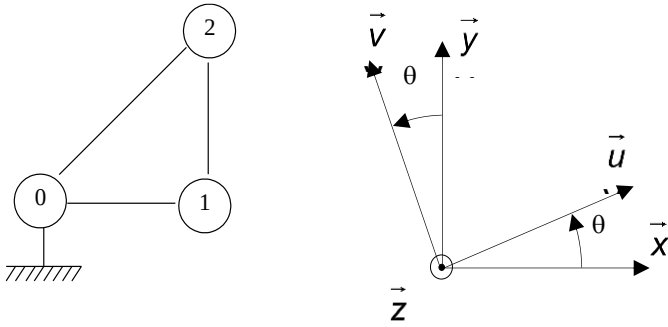
Pour suivre une trajectoire rectiligne selon $\vec{z}_0$ il faut $\vec{V}(D/0) \wedge \vec{z}_0 = \vec{0}$ soit les 2 composantes selon x_1 et y_1 de ce vecteur nuls :

$$h.\dot{\alpha} + d\dot{\alpha}\cos\beta + L\dot{\alpha}\sin\gamma\sin\beta - L\dot{\gamma}\sin\gamma = 0$$

$$d\dot{\beta}\sin\beta + \dot{\alpha}\cos\gamma - L\dot{\beta}\sin\gamma\cos\beta - L\dot{\gamma}\cos\gamma.\sin\beta = 0$$

Conclusion : les vitesses de rotations des 3 axes (liaisons pivot motorisées) du robot sont interdépendantes car j'ai un système de 2 équations à 3 inconnues cinématiques $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$.

Question 1 : Réaliser le graphe de liaison du mécanisme schématisé figure 2. Faire la figure plane de calcul.



Question 2 : Ecrire la fermeture géométrique OBD et en déduire la relation entrée-sortie entre d , θ ainsi que les paramètres géométriques constants nécessaires (voir schéma cinématique).

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$$

Projetée sur la direction x cette relation vectorielle donne :

$$e \cdot \cos \theta + g - d = 0$$

Relation dans laquelle g et e sont des constantes.

Question 3 : Donner le nombre de degré de liberté et la forme des torseurs cinématiques correspondant à chacune des liaisons L_{01} et L_{02} .

1 degré de liberté de rotation pour L_{01}

$$\{V_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{10} = r_{10} \vec{Z} \\ \vec{V}(O,1/0) = \vec{0} \end{array} \right\}_{B, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ r_{10} \end{array} \right\}_{O, A, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

1 degré de liberté de rotation pour L_{02}

$$\{V_{2/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{20} = \vec{0} \\ \vec{V}(M,2/0) = u_{20} \vec{x} \end{array} \right\}_{M, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_{M, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Question 4 : Ecrire la fermeture cinématique à l'aide des torseurs, en déduire les 2 relations vectorielles cinématiques.

$$\{V_{1/0}\} + \{V_{0/2}\} + \{V_{2/1}\} = \{0\} \text{ par composition des vitesses}$$

$$\{V_{1/0}\} - \{V_{2/0}\} + \{V_{2/1}\} = \{0\} \text{ par antisymétrie}$$

D'où les relations vectorielles valables quel que soit M :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{10} - \vec{\Omega}_{20} + \vec{\Omega}_{21} = \vec{0} \\ \vec{V}(M,1/0) - \vec{V}(M,2/0) + \vec{V}(M,2/1) = \vec{0} \end{array} \right.$$

Question 5 : En déduire un système de 6 équations scalaires à 7 inconnues.

On peut prendre O, A ou B comme point de réduction.

Mon choix se porte sur B pour minimiser le calcul de changement de point :

$$\begin{cases} 0 & - & 0 & + & p_{21} & = & 0 \\ 0 & - & 0 & + & q_{21} & = & 0 \\ r_{10} & - & 0 & + & r_{21} & = & 0 \\ -e \sin \theta_{r_{10}} & - & u_{20} & + & 0 & = & 0 \\ e \cos \theta_{r_{10}} & - & 0 & + & v_{21} & = & 0 \\ 0 & - & 0 & + & w_{21} & = & 0 \end{cases}$$

Il n'y a finalement que 2 expressions scalaires manquantes dans le système d'équations qui correspondent aux projections sur x et y de :

$$\vec{V}(B,1/0) = \vec{V}(O,1/0) + \vec{BO} \wedge \vec{\Omega}_{10} = \vec{0} + (-e\vec{u}) \wedge r_{10}\vec{z} = er_{10}\vec{v} = er_{10}(\cos \theta \vec{y} - \sin \theta \vec{x})$$

Question 6 : En déduire la relation entrée-sortie du mécanisme reliant u_{20} à r_{10} et les paramètres géométriques nécessaires.

On obtient alors la relation entrée sortie :

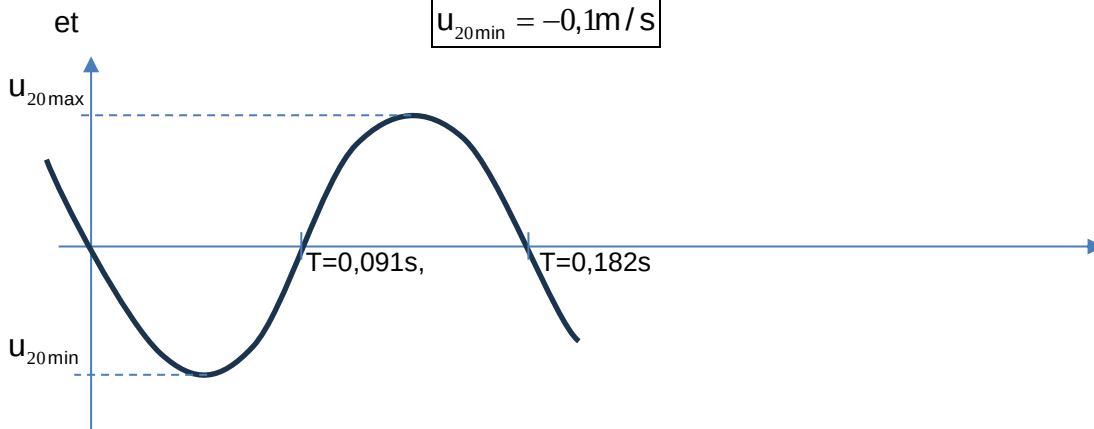
$$u_{20} = -e \sin \theta r_{10}$$

Question 7 : sachant que l'arbre d'entrée 1 tourne à la vitesse constante de 330tr/min, et que $e=30\text{mm}$, tracer l'évolution de la vitesse de la lame de scie 2 par rapport au bâti 0, sur la durée d'un aller et retour. Indiquer les valeurs extrêmes de cette vitesse.

La durée du tour est de $T=60/330=0,182\text{s}$

Les valeurs extrêmes étant : $u_{20\max} = e.r_{10} = 0,003.330.\frac{2\pi}{60} = 0,1\text{m/s}$

$$u_{20\min} = -0,1\text{m/s}$$



FIN