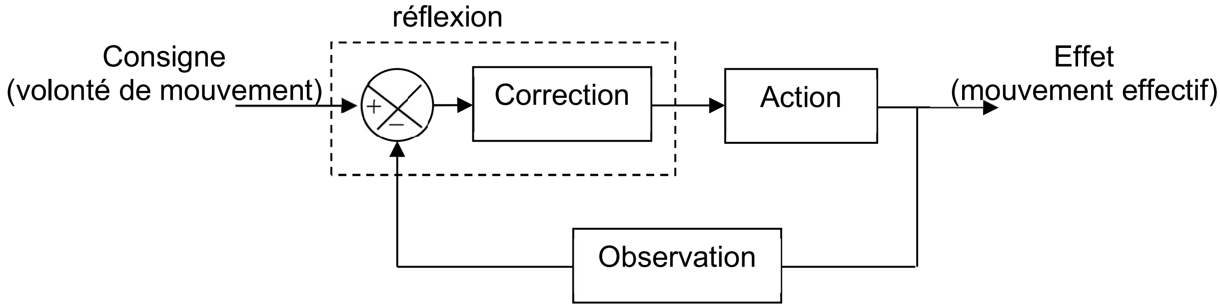
# STABILITÉ D'UN SYSTÈME ASSERVI

# 1. SYSTÈME ASSERVI

## 1.1. Définitions

Un système asservi réalise de manière organisé les activités : **Observation, Réflexion (comparaison et correction), Action**. On peut toujours aborder le fonctionnement d'un asservissement par analogie avec l'activité humaine, par exemple dans un mouvement du corps contrôlé :

Un exemple est donné par le comportement de l'homme dans un travail physique :




Un système asservi est donc un système à **retour d'information** utilisée pour évaluer **un écart** entre la consigne et l'effet lui-même **traité et amplifié** pour délivrer une puissance adaptée à l'action à réaliser pour atteindre la consigne.

## 1.2. Terminologie

Quand la grandeur de sortie :

- suit une **consigne d'entrée variable**, le système asservi est appelé **asservissement** (exemple : asservissement de position pour un robot).
- doit s'aligner sur une **consigne d'entrée constante**, le système asservi est appelé **régulation** (exemple : régulation de température ou de débit d'un fluide).

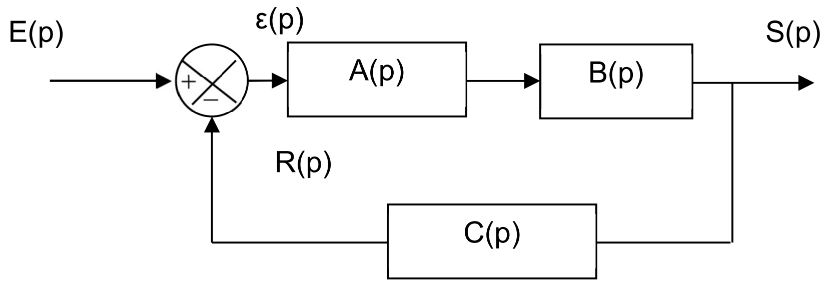
### 1.3. Remarque

Un système asservi est nécessairement bouclé. Mais un système bouclé n'est pas nécessairement un système asservi. Par exemple la modélisation classique du moteur à courant continu fait apparaître une rétroaction liée à une tension induite par le mouvement du rotor et de son bobinage dans le champ magnétique du stator. Mais ce n'est pas un asservissement.

Un bouclage est nécessaire si le système doit prendre en compte l'observation de sa sortie.

Boucle ouverte – Boucle fermée

Un système asservi peut être représenté par le schéma – bloc suivant :




Si C(p) = 1, le système est dit à retour unitaire.

La fonction de transfert en boucle fermée F.T.B.F. s'écrit :

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}}$$

formule de Black.Elle est aussi notée $H_f(p)$.

On appelle fonction de transfert en boucle ouverte F.T.B.O. :

$$\boxed{\frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = A(p).B(p).C(p)}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est le produit des transmittances de tous les éléments présents dans la chaîne, elle est souvent notée $H_o(p)$.

**Remarque :**

La fonction de transfert en boucle ouverte a rarement un sens physique. Cette notion a été mise en place car le produit des transmittances apparaît au dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée.

Ce chapitre montre tout l'intérêt de la fonction de transfert en boucle ouverte : son utilisation permet de prévoir le comportement du système en boucle fermée.

## 1.4. Allure générale de la réponse d'un système

La fonction de transfert en boucle fermée $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$ peut s'écrire d'une manière générale sous la forme décomposée en éléments simples :

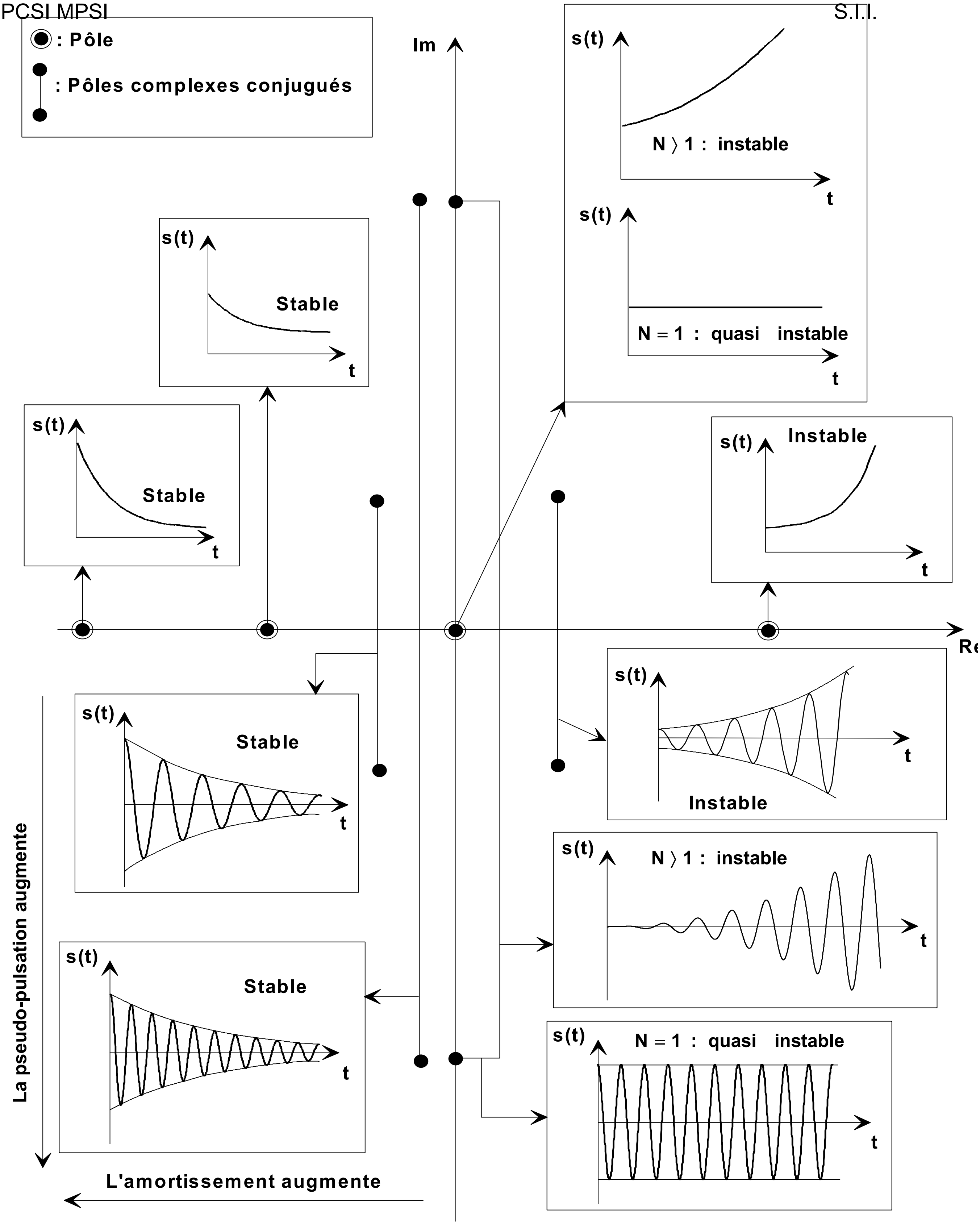
$$H(p) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{p^i} + \sum_j \frac{B_j}{p - p_j} + \sum_k \frac{C_k p + D_k}{(p - \alpha_k)^2 + \beta_k^2}.$$

Si l'entrée e(t) est une impulsion alors E(p) = 1, et H(p) = S(p). Nous obtenons alors $s(t) = L^{-1}\left[H(p)\right]$. Donc :

$$s(t) = L^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{p^i}\right] + L^{-1}\left[\sum_j \frac{B_j}{p - p_j}\right] + L^{-1}\left[\sum_k \frac{C_k p + D_k}{(p - \alpha_k)^2 + \beta_k^2}\right]$$

On obtient alors une somme de fonctions du temps dont chacun des termes présente l'une des allures représentées page suivantes. L'allure dépend des valeurs des racines, complexes ou réelles, des dénominateurs, appelés aussi pôles. On peut ainsi parler de **plan des pôles**, représenté dans le plan complexe de la page suivante.

Dans le cas d'un système du deuxième ordre avec un coefficient d'amortissement inférieur à 1, les deux racines du dénominateur s'écrivent $-\omega_0(\varepsilon \pm j\sqrt{1-\varepsilon^2})$ et la pseudo- pulsation vaut $\omega_0\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Donc plus on s'éloigne de l'axe des réels, plus le terme imaginaire $\pm j\sqrt{1-\varepsilon^2}$ augmente et plus la pseudo-pulsation augmente. De même plus on s'éloigne de l'axe des imaginaires, plus le terme réel $\left|-\varepsilon\right|$ augmente et plus le coefficient d'amortissement augmente.


: Pôle
: Pôles complexes conjugués
Im
Re
s(t)
t
N 〉 1 : instable
N = 1 : quasi instable
Stable
Instable
La pseudo-pulsation augmente
L'amortissement augmente

# 2. STABILITÉ D'UN SYSTÈME ASSERVI

### 1.5. Définition

Un système asservi est stable si une entrée (consigne ou perturbation) bornée occasionne une sortie (grandeur asservie) bornée.

**Remarque :**

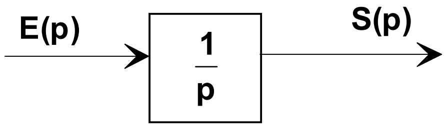
Un système asservi est donc stable si sa réponse impulsionnelle (ou indicielle) tend vers zéro (ou une constante) en régime permanent. La stabilité est une caractéristique intrinsèque de l'asservissement : le système est stable pour une entrée impulsionnelle, alors il est stable quelle que soit l'entrée.

### 1.6. Conclusions pratiques de la réponse d'un système

Au paragraphe précédent, nous avons vu que si les racines du dénominateur de la fonction de transfert H(p) sont à partie réelle négative alors la réponse impulsionnelle tend vers zéro. **Pour vérifier la stabilité d'un système asservi, il faut donc a priori rechercher les pôles de la fonction de transfert**.

Dans plusieurs cas simples, il est possible de conclure rapidement sur la stabilité ou l'instabilité d'un système.

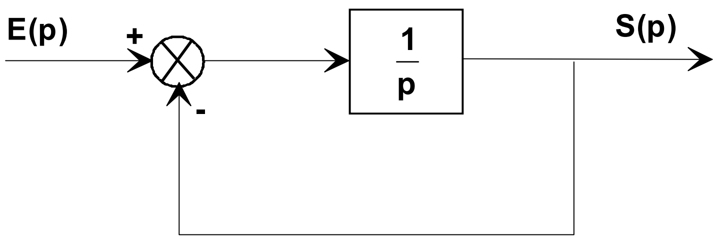
**intégrateur pur en chaîne directe**




$$\mathbf{H(p)=\frac{1}{p}}$$

Nous sommes dans le cas d'un **système quasi instable**.

**intégrateur pur en boucle fermée**




$$H(p)=\frac{\frac{1}{p}}{1+\frac{1}{p}}$$

$$\mathbf{H(p)=\frac{1}{1+p}}$$

Le pôle de H(p) est négatif, donc le **système est stable**.

**système du deuxième ordre en chaîne directe**

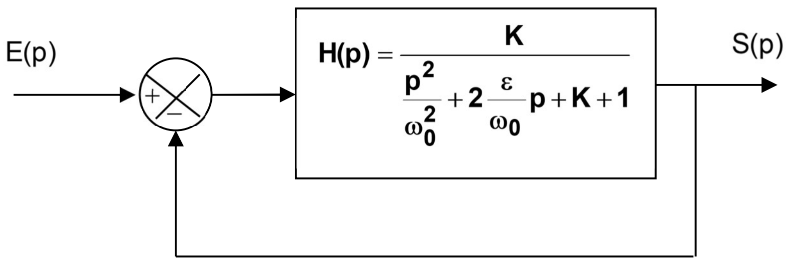
$$\mathbf{H(p)} = \frac{\mathbf{K}}{\dfrac{\mathbf{p^2}}{\boldsymbol{\omega_0^2}} + \mathbf{2}\dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{\omega_0}}\mathbf{p} + \mathbf{1}}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert H(p) a :

- deux racines réelles si $\varepsilon \rangle 1$.
- deux racines complexes conjuguées si $\varepsilon \langle 1$.
- une racine double si $\varepsilon = 1$.

Le produit de ces racines vaut $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\omega_0^2}} = \omega_0^2$ et est toujours positif. La somme de ces racines vaut $\dfrac{-\dfrac{2\varepsilon}{\omega_0}}{\dfrac{1}{\omega_0^2}} = -2\varepsilon\omega_0$ et est toujours négative. Les deux pôles de la fonction de transfert sont donc à parties réelles négatives, donc le **système est stable**.

**système du deuxième ordre en boucle fermée**




$$H(p) = \frac{\dfrac{K}{\dfrac{p^2}{\omega_0^2} + 2\dfrac{\varepsilon}{\omega_0}p + 1}}{1 + \dfrac{K}{\dfrac{p^2}{\omega_0^2} + 2\dfrac{\varepsilon}{\omega_0}p + 1}}$$

$$H(p) = \frac{K}{\dfrac{p^2}{\omega_0^2} + 2\dfrac{\varepsilon}{\omega_0}p + K + 1}$$

Le produit des racines du dénominateur de H(p) est égal à $(1+K)\omega_0^2$ et est positif, tandis que la somme de ces racines est égale à $-2\varepsilon\omega_0$ et est négative. Les deux pôles de la fonction de transfert sont donc à parties réelles négatives, donc le **système est stable**.

**Exercice 1 :** Déterminer l'expression littérale de la réponse impulsionnelle $s_i(t)$ d'un système modélisé par la fonction de transfert Hi(p) et conclure quant à la stabilité de ce système :

$$H_1(p) = \frac{10}{5+p} \quad ; \quad H_2(p) = \frac{4}{p(1+0,5p)} \quad ; \quad H_3(p) = \frac{8}{(1+p)(1-0,5p)}$$

$$H_4(p) = \frac{1}{p^2+4} \quad ; \quad H_5(p) = \frac{6}{p^2-4} \quad ; \quad H_6(p) = \frac{100}{2+p-p^2}$$

$$H_7(p) = \frac{1}{1+p-p^2+3p^3} \quad ; \quad H_8(p) = \frac{100}{2+p+p^2}$$

$$H_9(p) = \frac{3}{2+10p+16p^2+8p^3}$$

# 4. CRITÈRES GRAPHIQUES

Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée qui peut s'écrire $H(p)=\dfrac{N(p)}{1+H_o(p)}$ sont les zéros de la fonction de transfert $1+H_o(p)$.

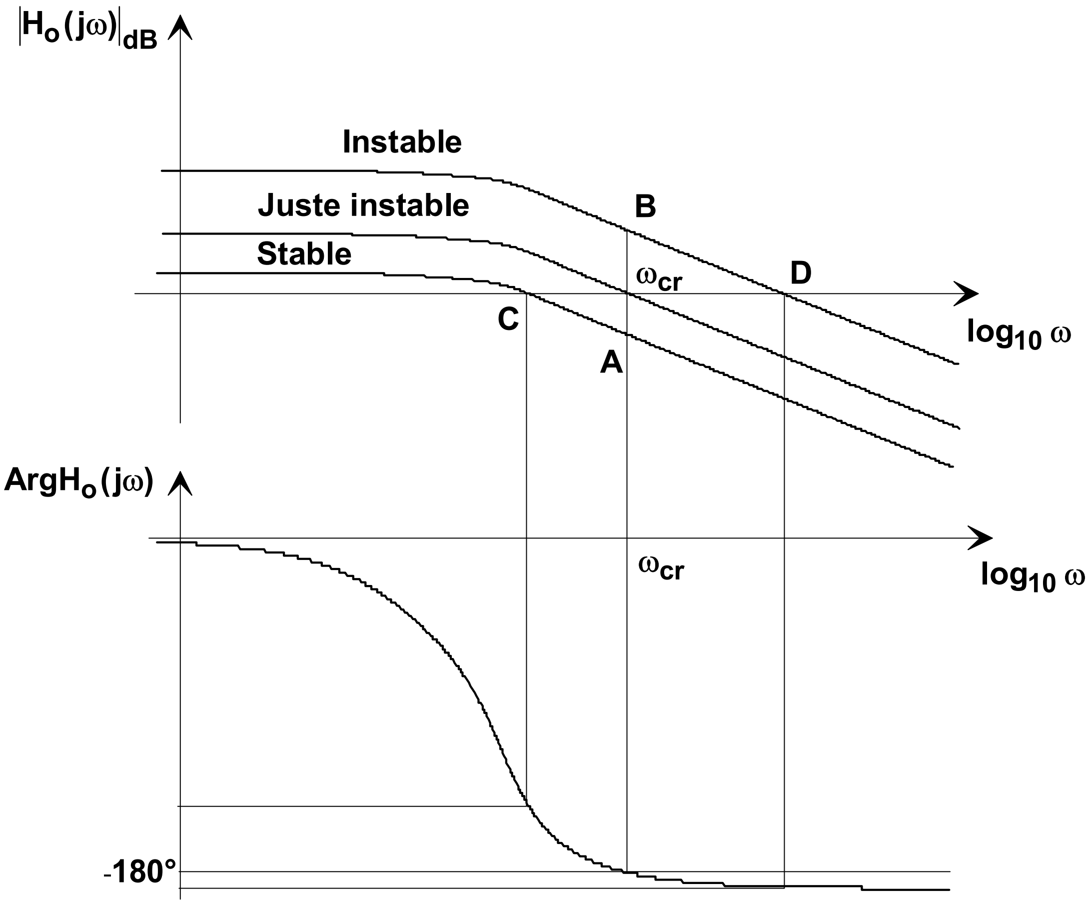
L'objectif de ces critères graphiques est d'obtenir des renseignements sur la stabilité d'un système en boucle fermée à partir du lieu de sa fonction de transfert en boucle ouverte.

### 1.7. Critère du revers dans le plan de BODE

Le lieu de Nyquist est la représentation dans le plan complexe des modules et arguments représentés dans les diagrammes de Bode. Le gain en dB correspondant au module en échelle logarithmique et la phase (ou déphasage) à l'argument.
Le critère du revers alors au programme à savoir utiliser pour les concours s'énonce de la manière syuivante :

Dans le plan de BODE, **le point critique a pour module 0 dB** et **pour argument $-180°$**. Le lieu de BODE sera celui d'une fonction de transfert en boucle ouverte d'un système stable en boucle fermée s'il contient un point de module 0 dB et d'argument supérieur à -180° ou un point de module inférieur à 0 dB et d'argument $-180°$.

La figure ci-dessous représente le lieu de BODE des fonctions de transfert en boucle ouverte de trois systèmes :
- le premier est stable,
- le deuxième est juste instable,
- le troisième est instable.




Le point A qui appartient au lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système stable en boucle fermée est de module inférieur à 0 dB et d'argument égal à $-\mathbf{180°}$.

Le point B qui appartient au lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système instable en boucle fermée est de module supérieur à 0 dB et d'argument égal à $-\mathbf{180°}$.

Le point C qui appartient au lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système stable en boucle fermée est de module égal à 0 dB et d'argument $\varphi_C$ supérieur à $-\mathbf{180°}$.
Le point D qui appartient au lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système instable en boucle fermée est de module égal à 0 dB et d'argument $\varphi_D$ inférieur à $-\mathbf{180°}$.

Ceci nous permet d'énoncer le critère du revers dans le plan de BODE :

Un système stable en boucle ouverte est stable en boucle fermée, si pour la pulsation $\omega_{cr}$ qui correspond à $\mathbf{Arg\,H_o(j\omega_{cr})} = -\mathbf{180°}$, la courbe de module passe par un point tel que $\left|\mathbf{H_o(j\omega_{cr})}\right| \langle\ \mathbf{0\ dB}$. Le système est instable en boucle fermée si pour cette pulsation $\omega_{cr}$, la courbe de module passe par un point tel que $\left|\mathbf{H_o(j\omega_{cr})}\right| \rangle\ \mathbf{0\ dB}$.

### 1.8. Bilan

En fonction des résultats précédents, nous pouvons énoncer qu'un système stable en boucle ouverte est stable en boucle fermée si :
$\left|\mathbf{H_o(j\omega)}\right| = \mathbf{1}$ (ou 0 dB) avec $\mathbf{Arg\,H_o(j\omega)} \rangle -\mathbf{180°}$ et $\mathbf{Arg\,H_o(j\omega)} = -\mathbf{180°}$ avec $\left|\mathbf{H_o(j\omega)}\right| \langle\ \mathbf{1}$ (ou 0 dB).

## 5. MARGES DE STABILITÉ

### 1.9. Justification

Les critères de stabilité se présentent comme un ensemble de conditions mathématiques que l'automaticien doit appliquer au modèle qu'il a établi ou aux résultats expérimentaux obtenus (les lieux des fonctions de transfert sont obtenus par modélisation ou expérimentalement).

Les critères de stabilité ne prennent pas en compte :

• Des erreurs de modèles, par exemple des constantes de temps (de fonction de transfert $H(p) = \dfrac{1}{1+Tp}$)

ou des retards purs (de fonction de transfert $H(p) = e^{-Tp}$) négligés volontairement ou non et qui provoquent des déphasages.
• Des dérives de comportement des composants au cours du temps qui se traduisent par une variation de la fonction de transfert.
• Des modifications de certains paramètres du système en cours de fonctionnement : une fusée en vol s'allège car elle «brûle» son carburant, l'inertie d'un robot diminue lorsque le bras se replie…
Il est donc concevable qu'un système réel, dont le modèle serait à la limite de la stabilité au sens des critères, devienne ou soit instable. Pour éviter cette mauvaise surprise, l'automaticien applique les critères avec des marges de sécurité définies généralement de manière expérimentale.

Pour définir ces marges de sécurité, l'automaticien s'appuie sur le critère du revers. Il est évident que plus le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte est éloigné du point critique, plus le système risque d'être stable et amorti en boucle fermée.

### 1.10. Spécifications pratiques : Marge de phase et marge de gain

L'automaticien définit en fait deux marges qui ont une signification physique.

**La marge de gain (M.G.), dont l'unité est le décibel, permet de tolérer une augmentation du gain**. Elle se définit à la pulsation critique $\omega_{cr}$ , pour laquelle le déphasage est égal à –180°, par la valeur dont on peut augmenter le gain sans provoquer d'instabilité :

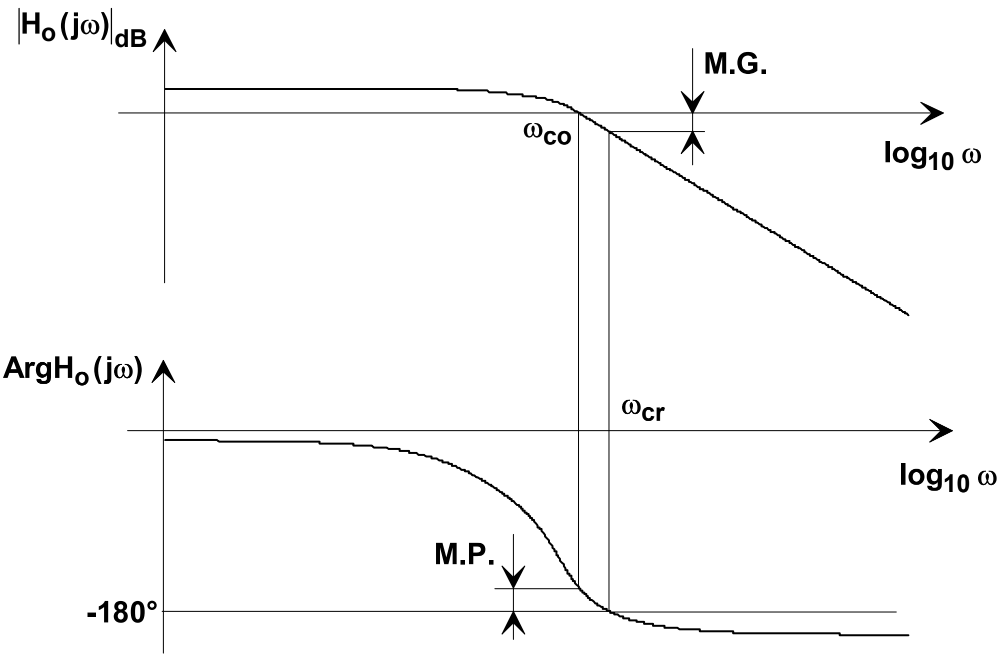
$$M.G. = -20\log\left|H_o(j\omega_{cr})\right| \text{ avec } \varphi(\omega_{cr}) = -180°$$

**La marge de phase (M.P.), dont l'unité est le degré, permet de tolérer des déphasages supplémentaires**. Elle se définit à la pulsation de coupure $\omega_{c0}$ par l'angle de phase additionnel qui rendrait le système instable :

$$M.P. = 180° + \text{Arg } H_o(j\omega_{co}) \text{ avec } \left|H_0\right|(\omega_{c0}) = 1 \text{ soit } 20\log\left|H_0\right|(\omega_{c0}) = 0\text{dB}$$

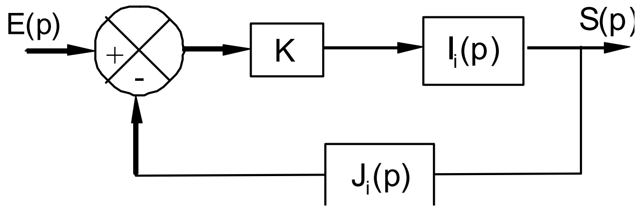
Les marges de gain et de phase sont définies ci-dessous dans les plans de BODE.

Plan de BODE



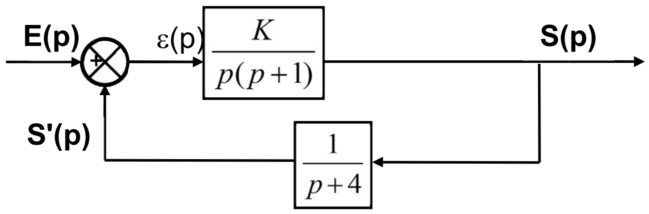

En règle générale l'automaticien adopte comme valeurs pratiques pour satisfaire un degré de stabilité convenable : **M.G. ≈ 12 dB et M.P. = 45°**

**Exercice 1 :** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système dont le schéma bloc est donné. Déterminer les conditions de stabilité théorique des systèmes ainsi modélisés.



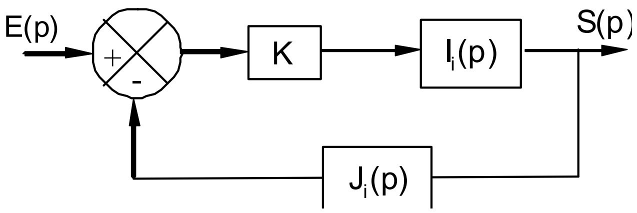

1. $I_1(p) = \frac{3}{(2+0{,}1.p)^3}$ et $J_1(p) = 3$ ;
2. $I_2(p) = \frac{1}{p(1+0{,}5.p)^2}$ et $J_2(p) = 2$
3. $I_3(p) = \frac{2}{p(1+2.p+3p^2)}$ et $J_3(p) = 4$

**Exercice 2 :**




1. On s'intéresse à la boucle d'asservissement ci-dessus. Déterminer la valeur critique du gain K qui rend le système instable.
2. Calculer la FTBF pour cette valeur de K. Déterminer alors ses pôles. Exprimer la réponse indiciel du système ainsi réglé. Conclure

**Exercice 4 :** Déterminer les conditions de stabilité, avec les marges $MG \geq 3dB$ et ,$M\varphi \geq 45°$ d'un système modélisé par un schéma bloc à partir des diagrammes de Bode :




1. $I_1(p) = \frac{3}{2+0{,}1.p}$ et $J_1(p) = 3$
2. $I_2(p) = \frac{2}{1+0{,}1p+3p^2}$ et $J_2(p) = 1$
3. $I_3(p) = \frac{2}{p(1+2.p+3p^2)}$ et $J_3(p) = 4$