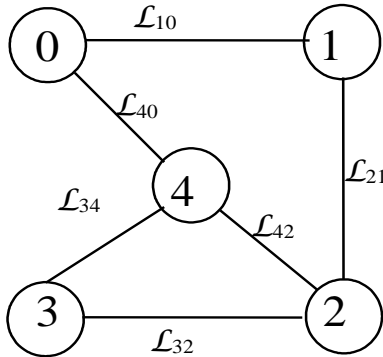


TRAIN EPICYCLOÏDAL et APPLICATION au REFROIDISSEMENT d'un VEHICULE 4x4

1.1.



1.2. Roulement :

$$\vec{\Omega}_{2/1} // \vec{z}_0$$

et

$$\vec{\Omega}_{2/3} // \vec{z}_0$$

Non glissement :

$$\vec{V}(A,2/1) = \vec{0}$$

et

$$\vec{V}(B,2/3) = \vec{0}$$

$$1.3. \{V_{1/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}(O,1/0) \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} \omega_{10} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{10} & 0 \end{matrix} \right\}_O$$

$$\{V_{4/2}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{4/2} \\ \vec{V}(C,4/2) \end{matrix} \right\}_C = \left\{ \begin{matrix} \omega_{42} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{42} & 0 \end{matrix} \right\}_C$$

$$\{V_{4/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{4/0} \\ \vec{V}(O,4/0) \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} \omega_{40} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{40} & 0 \end{matrix} \right\}_O$$

$$\{V_{3/4}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{3/4} \\ \vec{V}(O,3/4) \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} \omega_{34} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{34} & 0 \end{matrix} \right\}_O$$

$$\{V_{3/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{3/0} \\ \vec{V}(O,3/0) \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} \omega_{30} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{30} & 0 \end{matrix} \right\}_O$$

$$\{V_{3/2}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{3/2} \\ \vec{V}(B,3/2) \end{matrix} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} \omega_{32} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{32} & 0 \end{matrix} \right\}_B \quad \{V_{2/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}(A,2/1) \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \omega_{21} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{21} & 0 \end{matrix} \right\}_A$$

1.4.

On traduit 2 des 3 fermetures cinématiques permettant d'exprimer de manière exhaustive les relations entre mouvements associés aux liaisons dans ce mécanisme. On traduit le roulement sans glissement en A

et B on obtient deux relations linéaires entre les vitesses de rotation ω_{10} , ω_{30} , ω_{40} et ω_{42} . Par combinaison linéaire de ces deux équations, on obtient une relation entre ω_{10} , ω_{30} , ω_{40} et les rayons r_1 et r_2 .

$$\text{Ainsi } \{V_{4/2}\} + \{V_{2/3}\} + \{V_{2/3}\} = \{0\} \text{ et } \{V_{4/2}\} + \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\} + \{V_{0/4}\} = \{0\}$$

1.5.

$$\vec{V}(A,2/1) = \vec{0}$$

On utilise la relation de composition des vitesses :

$$\vec{V}(A,2/1) = \vec{V}(A,2/4) + \vec{V}(A,4/0) + \vec{V}(A,0/1) = \vec{0}$$

On utilise la relation de changement de point :

$$\vec{V}(A,2/4) = \vec{V}(C,2/4) + \vec{AC} \wedge \vec{\Omega}_{2/4} = r_2 \vec{x}_4 \wedge \omega_{24} \vec{z}_0$$

$$\vec{V}(A,4/0) = \vec{V}(O,4/0) + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{4/0} = -r_1 \vec{x}_4 \wedge \omega_{40} \vec{z}_0$$

$$\vec{V}(A,1/0) = \vec{V}(O,1/0) + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -r_1 \vec{x}_4 \wedge \omega_{10} \vec{z}_0$$

d'où

$$-r_2 \omega_{24} \vec{y}_4 + r_1 \omega_{40} \vec{y}_4 - r_1 \omega_{10} \vec{y}_4 = \vec{0}$$

soit la relation scalaire :

$$-r_2 \omega_{24} + r_1 \omega_{40} - r_1 \omega_{10} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{V}(B,2/3) = \vec{0}$$

On utilise la relation de composition des vitesses :

$$\vec{V}(B,2/3) = \vec{V}(B,2/4) + \vec{V}(B,4/0) + \vec{V}(B,0/3) = \vec{0}$$

On utilise la relation de changement de point :

$$\vec{V}(B,2/4) = \vec{V}(C,2/4) + \vec{BC} \wedge \vec{\Omega}_{2/4} = -r_2 \vec{x}_4 \wedge \omega_{24} \vec{z}_0$$

$$\vec{V}(B,4/0) = \vec{V}(O,4/0) + \vec{BO} \wedge \vec{\Omega}_{4/0} = -r_3 \vec{x}_4 \wedge \omega_{40} \vec{z}_0 \text{ avec } r_3 = 2.r_2 + r_1$$

$$\vec{V}(B,3/0) = \vec{V}(O,3/0) + \vec{BO} \wedge \vec{\Omega}_{3/0} = -r_3 \vec{x}_4 \wedge \omega_{30} \vec{z}_0$$

d'où

$$r_2 \omega_{24} \vec{y}_4 + r_3 \omega_{40} \vec{y}_4 - r_3 \omega_{30} \vec{y}_4 = \vec{0}$$

soit la relation scalaire :

$$r_2 \omega_{24} + r_3 \omega_{40} - r_3 \omega_{30} = 0 \quad (2)$$

par somme membre à membre de (1) et (2) on obtient :

$$r_3 \omega_{40} + r_1 \omega_{40} - r_1 \omega_{10} - r_3 \omega_{30} = 0$$

soit

$$\omega_{10} + \frac{r_3}{r_1} \omega_{30} - \frac{r_3 + r_1}{r_1} \omega_{40} = 0$$

et finalement

$$\boxed{\omega_{10} - K \omega_{30} + (K - 1) \omega_{40} = 0} \quad (3)$$

avec $\boxed{K = -\frac{r_3}{r_1} = -\frac{2.r_2 + r_1}{r_1}}$

2. REFROIDISSEMENT du MOTEUR d'un VEHICULE 4x4

2.1.1. Montrer que quelque soit la raison K retenue pour le train épicycloïdal, en cinquième vitesse on aura toujours $\omega_v = \omega_m$.

d'après (3) on a : $\omega_b - K\omega_v + (K-1)\omega_m = 0$

et on a en cinquième : $1 = \frac{\omega_b}{\omega_m}$

d'où $\omega_m - K\omega_v + (K-1)\omega_m = 0$ et $\boxed{\omega_v = \omega_m}$

2.1.2. Des études expérimentales montrent que pour que le refroidissement soit correct en première vitesse, il est nécessaire que $\omega_v = 1,4 \omega_m$.

En déduire la valeur de K à retenir.

En première $0,2 = \frac{\omega_b}{\omega_m}$

$0,2\omega_m - K\omega_v + (K-1)\omega_m = 0$ soit $\omega_v = \frac{K-0,8}{K}\omega_m$

donc $\frac{K-0,8}{K} = 1,4$

$K-0,8 = 1,4.K$ $\boxed{K = -2}$

2.2. Etude des performances

2.2.1. Avec la valeur de K retenue, calculez alors le rapport $\frac{\omega_v}{\omega_m}$ pour les différents rapports de boîte.

D'après (3) on a $\omega_v = \frac{K+r-1}{K}\omega_m$ soit $\frac{\omega_v}{\omega_m} = \frac{3-r}{2}$

○ en marche arrière $\frac{\omega_v}{\omega_m} = 1,6$

○ en première $\frac{\omega_v}{\omega_m} = 1,4$

○ en seconde $\frac{\omega_v}{\omega_m} = 1,3$

○ en troisième $\frac{\omega_v}{\omega_m} = 1,2$

○ en quatrième $\frac{\omega_v}{\omega_m} = 1,1$

○ en cinquième $\frac{\omega_v}{\omega_m} = 1$

2.2.2. Le graphe donné sur la feuille réponse donne l'évolution temporelle de la vitesse de déplacement du véhicule lors d'une phase de décélération uniforme de 96 km/h à 9,6 km/h, puis stabilisation à 9,6 km/h sur le premier rapport de la boîte de vitesses.

Les changements de rapport de la boîte de vitesses sont indiqués. Complétez ce graphe en y faisant figurer les évolutions de ω_b , ω_m et ω_v correspondantes. Vous utiliserez un code clair (couleurs par exemples) pour bien distinguer ω_b , ω_m et ω_v . Les différentes justifications de vos tracés seront donnés à côté du graphe.

A l'instant initial en 5ieme vitesse : $\omega_b = \frac{96.10^3}{60} \cdot \frac{5}{2}$; et $\omega_b = \omega_m = \omega_v = 4000\text{tr / min}$

A l'instant final en 1ere vitesse :

$\omega_b = \frac{9,6.10^3}{60} \cdot \frac{5}{2} = 400\text{tr / min}$; et $\omega_m = \frac{\omega_b}{0,2} = 2000\text{tr / min}$; et $\omega_v = 1,4.\omega_m = 2800\text{tr / min}$ Les

évolutions de vitesses de rotations sont proportionnelles et correspondent donc à des segments de droites entre les instants de changement de rapport de boîte. On lit alors les différentes vitesses de rotations ω_b à ces instants :

$$\omega_b = 3300\text{tr / min}$$

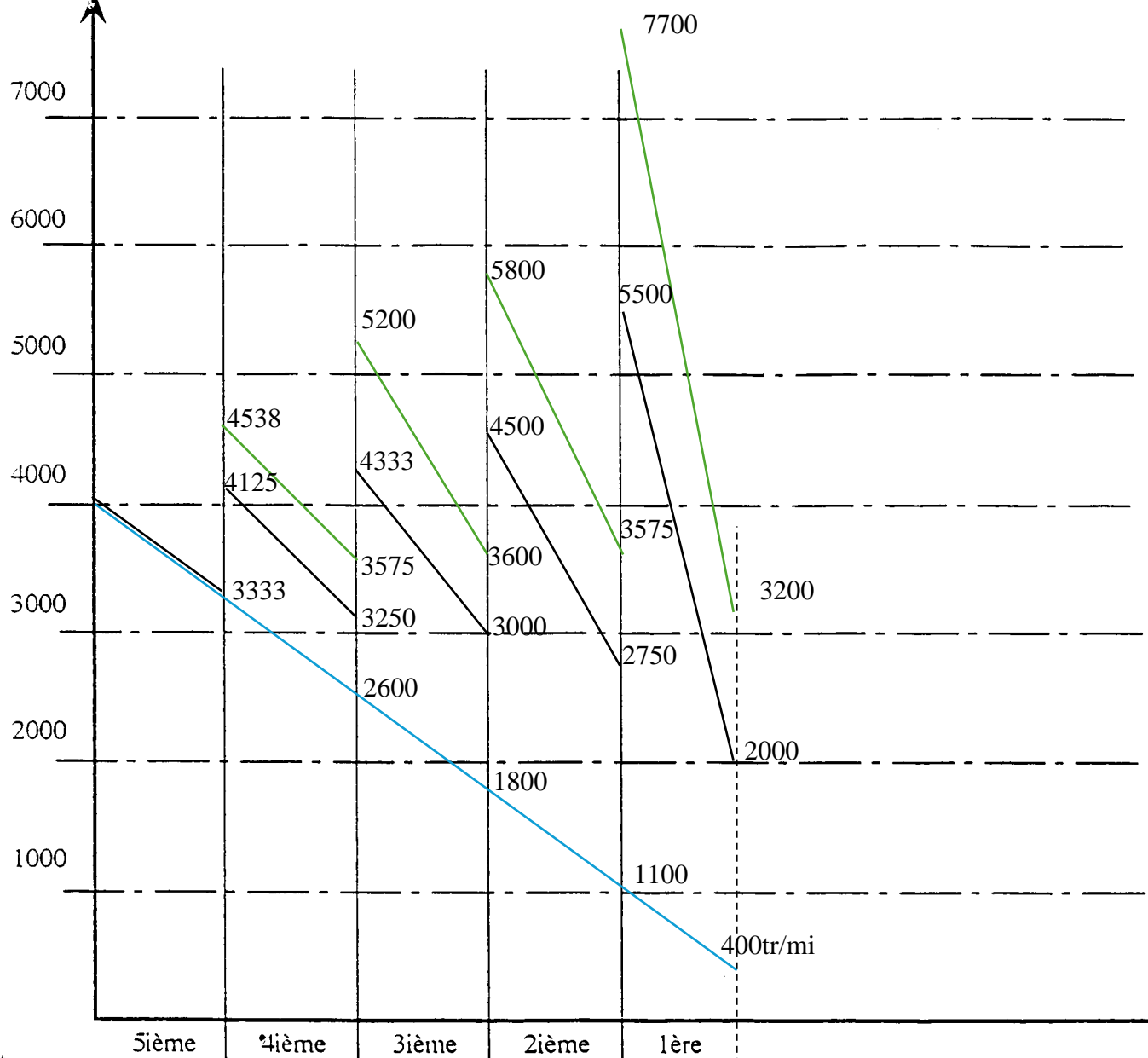
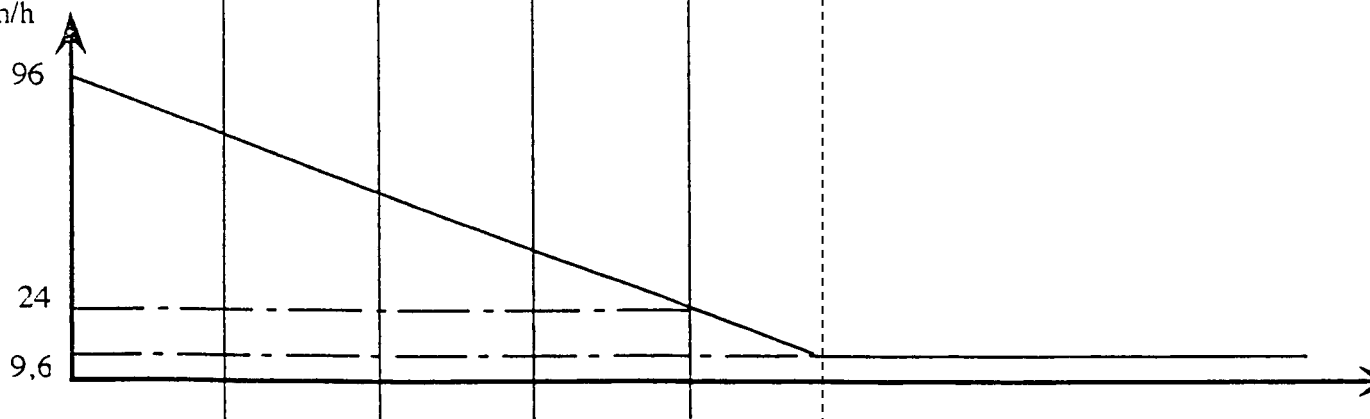
$$\omega_b = 2600\text{tr / min}$$

$$\omega_b = 1800\text{tr / min}$$

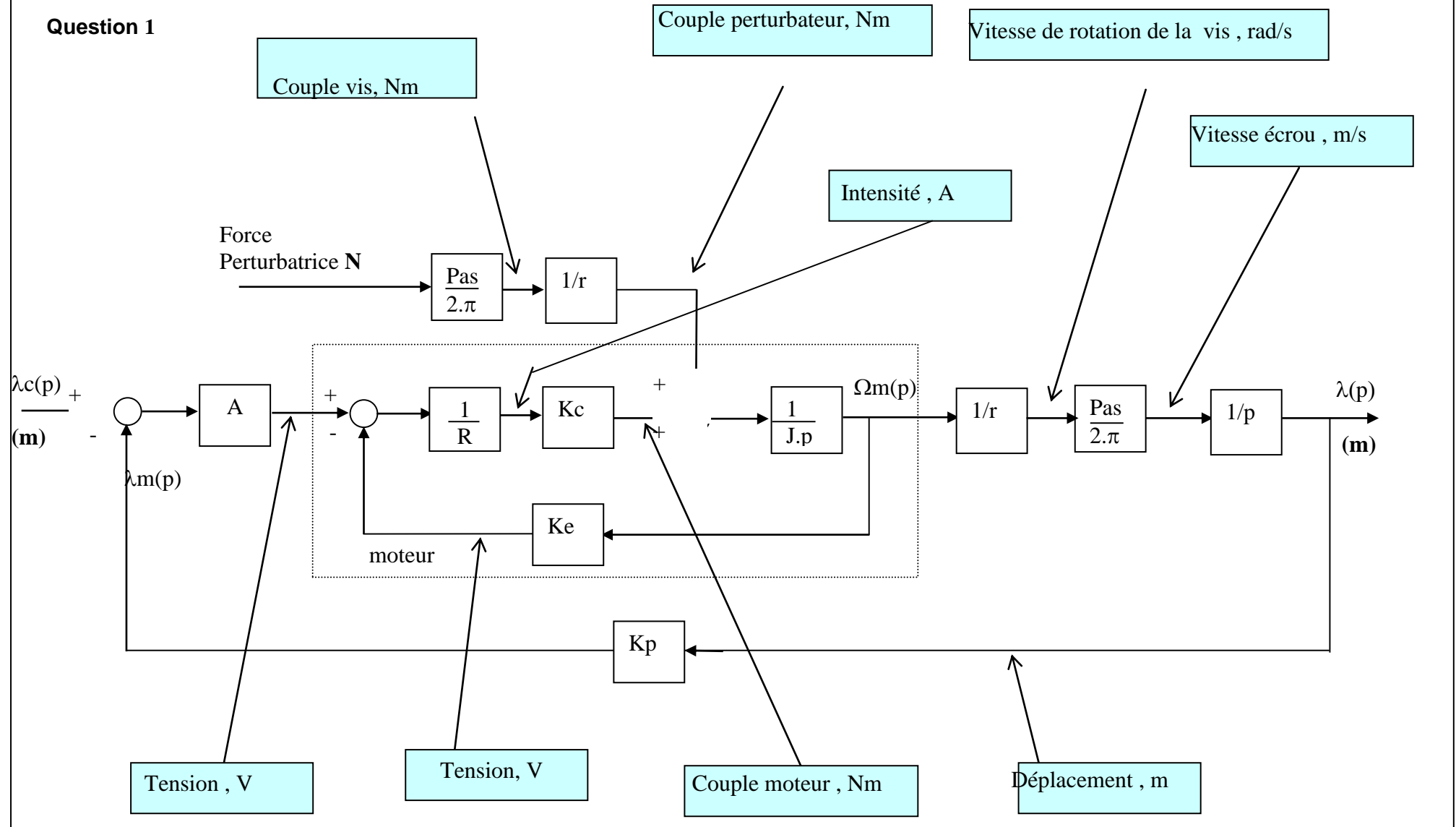
$$\omega_b = 1100\text{tr / min}$$

On utilise ensuite les coefficients déterminés pour chaque rapport dans la question précédente.

On obtient les valeurs reportées sur le graphe.

$\omega_b, \omega_m, \omega_v$, en tr/mnvitesse
en km/h

Question 1



Question 2

$$H1 = \frac{\frac{Kc}{R.J.p}}{1 + \frac{Kc.Ke}{R.J.p}} = \frac{Kc}{R.J.p + Kc.Ke} = \frac{1/Ke}{\frac{R.J}{Kc.Ke} p + 1} = \frac{Km}{Tm.p + 1}$$

$$Km = 1/Ke = 50 \text{ rd/s/V}$$

$$Tm = \frac{R.J}{Ke.Kc} = \frac{10.10^{-6}}{20.10^{-3}.20.10^{-3}} = \frac{1}{40} \text{ s}$$

Question 3

$$1/H2 = \frac{2.\pi.r.p}{Pas.A} \cdot 1/H1 + 1 = \frac{2.\pi.r.p}{Pas.A} \cdot \frac{Tm.p + 1}{Km} + 1 = \frac{2.\pi.r.Tm.p^2 + 2.\pi.r.p + Pas.A.Km}{Pas.A.Km}$$

$$H2 = \frac{1}{\frac{2.\pi.r.Tm.p^2}{Pas.A.Km} + \frac{2.\pi.r.p}{Pas.A.Km} + 1}$$

$$K2 = 1$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Pas.A.Km}{2.\pi.r.Tm.}}$$

$$\frac{2.z}{\omega_0} = \frac{2.\pi.r}{Pas.A.Km} \rightarrow z = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{2.\pi.r}{Pas.A.Km} = \sqrt{\frac{Pas.A.Km}{2.\pi.r.Tm.}} \cdot \frac{\pi.r}{Pas.A.Km} = \sqrt{\frac{\pi.r}{2.Tm.Pas.A.Km}}$$

Question 4

Pour une réponse sans dépassement, il faut : $z = 1$

$$\frac{\pi.r}{2.Tm.Pas.A.Km} = 1 \rightarrow A = \frac{\pi.r}{2.Tm.Pas.Km}$$

$$A = \frac{\pi.20.40.2}{2.\pi.10^{-3}.50} = 16.10^3 \text{ V/m}$$

Question 5

On en déduit donc :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Pas.A.Km}{2.\pi.r.Tm.}} = \sqrt{2. \frac{\pi.10^{-3}.16000.50.40}{2.\pi.20.}} = 20 \text{ rd/s}$$

$$H2 = \frac{1}{\frac{p^2}{400} + \frac{p}{10} + 1} = \frac{1}{\left(\frac{p}{20} + 1\right)^2}$$

Question 6

La valeur finale correspond à un gain statique $K=1$.

Il y a un dépassement d'environ 3%

On peut en déduire $z=0,75$ d'après l'abaque des dépassements ou en inversant la formule du premier

dépassement $D_1 = e^{\frac{-\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$.

Et de l'abaque des temps de réponse réduit ou de la formule de la pseudo période :

$$\omega_0 = \frac{2.\pi}{T\sqrt{1-z^2}} = \frac{6,28}{0,44\sqrt{1-0,75^2}} = 21,6 \text{ s}$$

Question 7

Fonction de transfert $H3(p) = \lambda(p) / F(p)$.

On peut décaler le sommateur de la perturbation en amont du premier sommateur et on obtient directement :

$$H_3(p) = \frac{R}{A.K_e} \cdot \frac{Pas}{2\pi r} \cdot H_2(p)$$

Ou on lit le schéma bloc « à l'envers » :

$$1/H3 = F/\lambda = \frac{2\pi r}{Pas} \cdot Cr/\lambda \text{ en notant } Cr \text{ le couple perturbateur arrivant au-dessus du 2^{ème} sommateur :}$$

$$1/H3 = \frac{2\pi r}{Pas} \left[\frac{J.r.2\pi.p^2}{Pas} + \frac{Kc.K_e.r.2\pi.p}{R.Pas} + \frac{A.Kc}{R} \right] = \frac{2\pi r}{Pas} \left[\frac{J.r.R.2\pi.p^2 + Kc.K_e.r.2\pi.p + A.Kc.Pas}{R.Pas} \right]$$

$$H3 = \frac{R.Pas^2}{2\pi r} \cdot \frac{1}{J.r.R.2\pi.p^2 + Kc.K_e.r.2\pi.p + A.Kc.Pas}$$

$$H3 = \frac{R.Pas}{2\pi r.A.Kc} \cdot \frac{1}{\frac{J.r.R.2\pi}{A.Kc.Pas} p^2 + \frac{K_e.r.2\pi}{A.Pas} p + 1}$$

$$K3 = \frac{R.Pas}{2\pi r.A.Kc} = \frac{1}{160.A} \Rightarrow K3 = \frac{1}{256.10^4}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Pas.A.Kc}{2\pi r.J.R}}$$

$$\frac{2.z}{\omega_0} = \frac{2\pi r.K_e}{Pas.A} \rightarrow z = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{2\pi r.K_e}{Pas.A} = 1 \quad \Rightarrow z = \frac{1}{2} \cdot K_e \cdot \sqrt{\frac{2\pi r.Kc}{J.R.Pas.A}}$$

$$H3 = \frac{25.10^{-3}}{32} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{20} + 1\right)^2} \quad H3 = \frac{1}{256.10^4} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{20}\right)^2}$$

Question 8 Force perturbatrice est de 100N

$$\Delta\lambda = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(\frac{100}{p} \cdot H3 \right) = 100 \cdot \frac{R.Pas}{2\pi r.A.Kc} = 100 \cdot \frac{10^{-3}}{256} = \frac{10^{-1}}{256} \text{ m} = 0,39 \text{ mm}$$

Le cahier des charges est respecté.

Question 9 Fonction de transfert $H4(p) = \lambda(p)/\varepsilon(p)$.

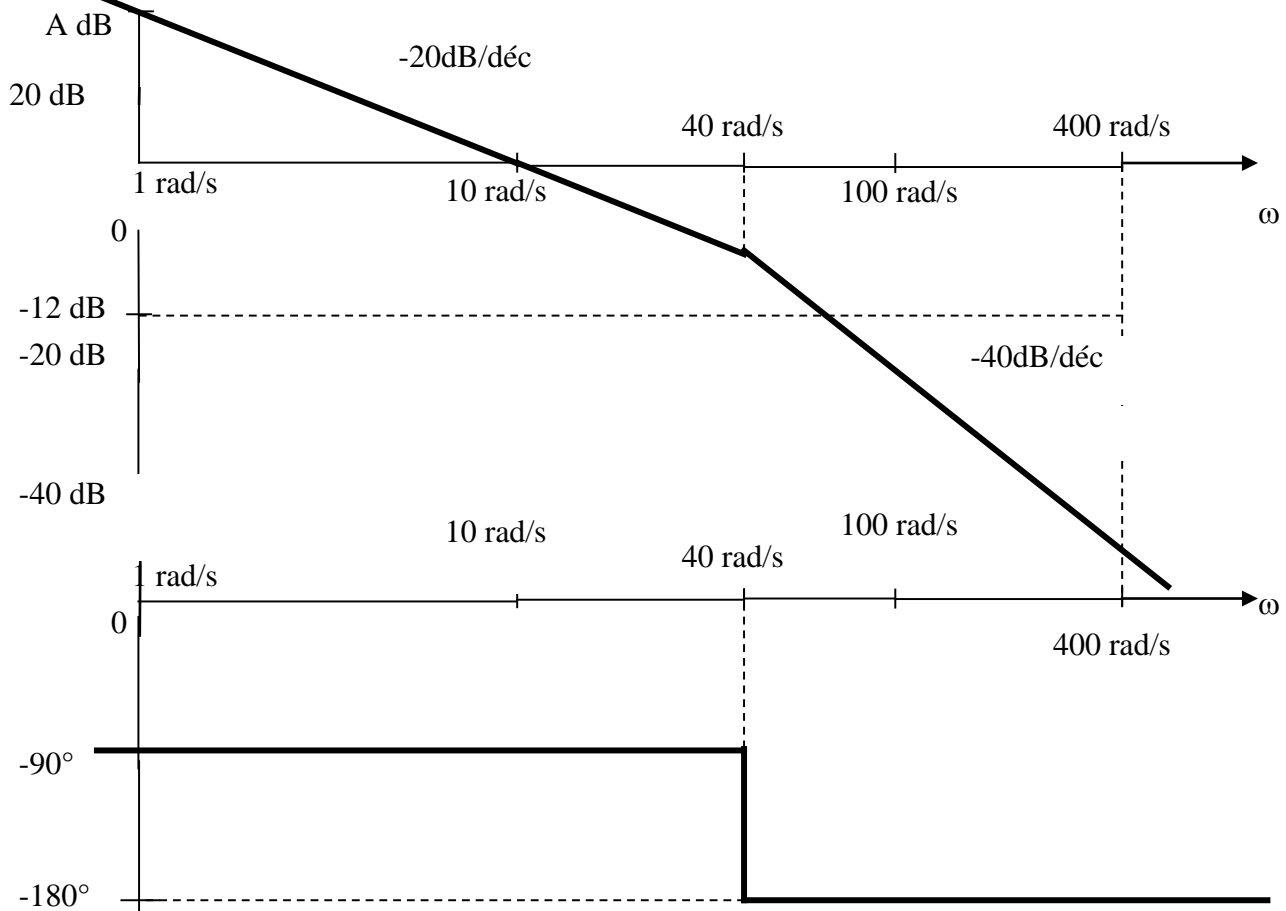
$$H4 = A.H1 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{Pas}{2\pi} \cdot \frac{1}{p} = \frac{A.Pas}{K_e.r.2\pi} \cdot \frac{1}{p \cdot \left(\frac{R.J}{Kc.K_e} p + 1 \right)}$$

Question 10 : En prenant la valeur de $A = 16000 \text{ V/m}$

$$H4 = \frac{16000.\pi}{2.20.10^{-3}.20.2\pi} \cdot \frac{1}{p \cdot \left(\frac{p}{40} + 1 \right)} = \frac{10}{p \cdot \left(\frac{p}{40} + 1 \right)}$$

Question 11 : Diagramme asymptotique de Bode de $H_4(j.\omega)$

Echelles : 5 cm pour 1 décade ; 2 cm pour 20 dB ; 2 cm pour 90°

Explications des constructions du diagramme asymptotique de Bode de $H_4(j.\omega)$

$$H_4(j\omega) = \frac{10}{j\omega.(1 + 0,025j\omega)}$$

Par superposition :

ω	0	40 rad/s	$+\infty$
$\frac{1}{j\omega}$		-20dB/dec	-20dB/dec
$\frac{10}{1+0,025j\omega}$		0dB/dec	-20dB/dec
$H_4(j\omega) = \frac{10}{j\omega.(1+0,025j\omega)}$		-20dB/dec	-40dB/dec

Pour le déphasage les valeurs asymptotiques de phase de $-n.90^\circ$ correspondent aux pentes de $-n.20\text{dB/dec}$ de gain en dB

Les valeurs d'abscisse et d'ordonnée à la cassure sont (40 rad/s, -12 dB)

En effet on additionne les valeurs asymptotiques de gain des 2 facteurs :

$$\text{GdB}(40) \approx -20\log(40) + 20\log(10) = -20\log(4.10) + 20\log(10)$$

$$\text{GdB}(40) \approx -20\log(4) - 20\log(10) + 20\log(10) = -12\text{dB}$$

D'où le tracé.

On peut aussi refaire l'étude asymptotique suivante :

- Quand $\omega \rightarrow 0$, $H_4(j\omega) \approx \frac{10}{j\omega}$.
 1^{ère} asymptote de gain : $AdB = 20 \log 10 - 20 \log \omega = 20 - 20 \log \omega$
 1^{ère} asymptote de phase : $\phi = -90^\circ$
- A partir de $\omega = 40$ rad/s, on a une 2^{ème} asymptote de gain de pente -40 dB/déc
 2^{ème} asymptote de gain : $AdB = x - 40 \log \omega$
 2^{ème} asymptote de phase : $\phi = -180^\circ$
 Les 2 asymptotes de gain se coupent pour $\omega = 40$ rad/s, soit pour :
 $AdB = 20 - 20 \log 40 = 20 - 20.1,6 = -12$ dB
 On a donc : $x = -12 + 40 \log 40 = -12 + 40.1,6 = 52$

L'équation de la 2^{ème} asymptote de gain est donc : $AdB = 52 - 40 \log \omega$

Question 12 : Valeur de la pulsation (ω_c)

La valeur du gain pour la pulsation $\omega = 1$ rad/s est égale à 20 dB.
 Comme la pente est de -20dB/déc, l'asymptote coupe l'axe des 0 dB à 10 rad/s.

La pulsation ω_c vaut donc 10 rad/s.

Question 13 : Valeur de la phase: $\phi(\omega_c)$.

$$\phi(\omega_c) = -90^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{10}{40} \right) = -90^\circ - 14^\circ = -104^\circ$$