

DM3 corrigé

SUSPENSION AUTOMOBILE

1. J'applique la transformée de Laplace à (3)

$$k Z_r(p) + f \cdot p \cdot Z_r(p) = M p^2 Z(p) + f \cdot p Z(p) + k Z(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{H(p) = \frac{k + f \cdot p}{k + f \cdot p + M \cdot p^2}}$$

aux conditions initiales nulles $z_r(0) = z(0) = 0 \text{ m}$
 $\dot{z}(0) = 0 \text{ m.s}^{-1}$

$$H(p) = \frac{1 + \frac{f}{k} p}{1 + \frac{f}{k} p + \frac{M}{k} p^2}$$

$$\text{A.N.: } \boxed{H(p) = \frac{1 + 10^{-2} p}{1 + 10^{-2} p + 1,95 \cdot 10^{-2} p^2}}$$

2. $\tau = 10^{-2} \text{ s}$

$$\omega_0 = 8,9 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\xi = 0,045$$

$$3. |H(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\arg(H(j\omega)) = \arctan(\tau \omega) - \arctan\left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

$$4. \quad z(t) = \frac{\dot{z}_{r0} \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \sin\left(\omega t + \arctan \frac{\tau \omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} - \arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

$$z(t) = z_{r0} |H(j\omega)| \sin(\omega t + \arg(H(j\omega)))$$

5. per superposition:

ω	0	ω_0	$\frac{1}{\tau}$	$+\infty$
$1 + \tau p$	0 0°	0 0°		+20dB/dec $+90^\circ$
$\frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$	0 0°	-40dB/dec -180°		-40dB/dec -180°
$H(p)$	0 0°	-40dB/dec -180°		-20dB/dec -90°

$$6. \quad \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \approx \omega_0$$

$$= 0,892 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$|H(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} = 11,4$$

$$7. \quad \xi = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{f}{k} = \frac{f}{2\sqrt{kM}}$$

On veut $\omega_r = 2\pi f_r$ avec $f_r = 1 \text{ Hz}$

d'où $\omega_r = 2\pi$

$$\text{or } \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{M}} \sqrt{1 - \frac{f^2}{2kM}} = 2\pi$$

$$\Rightarrow f = \sqrt{2kM} \left(1 - \frac{4\pi^2 M}{k} \right)$$

$$F = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 250} \left(1 - \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 250}{20000} \right)$$

$$F = 10^3 \sqrt{10} (1 - 0,05\pi^2)$$

$$\boxed{F = 1602 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}}$$

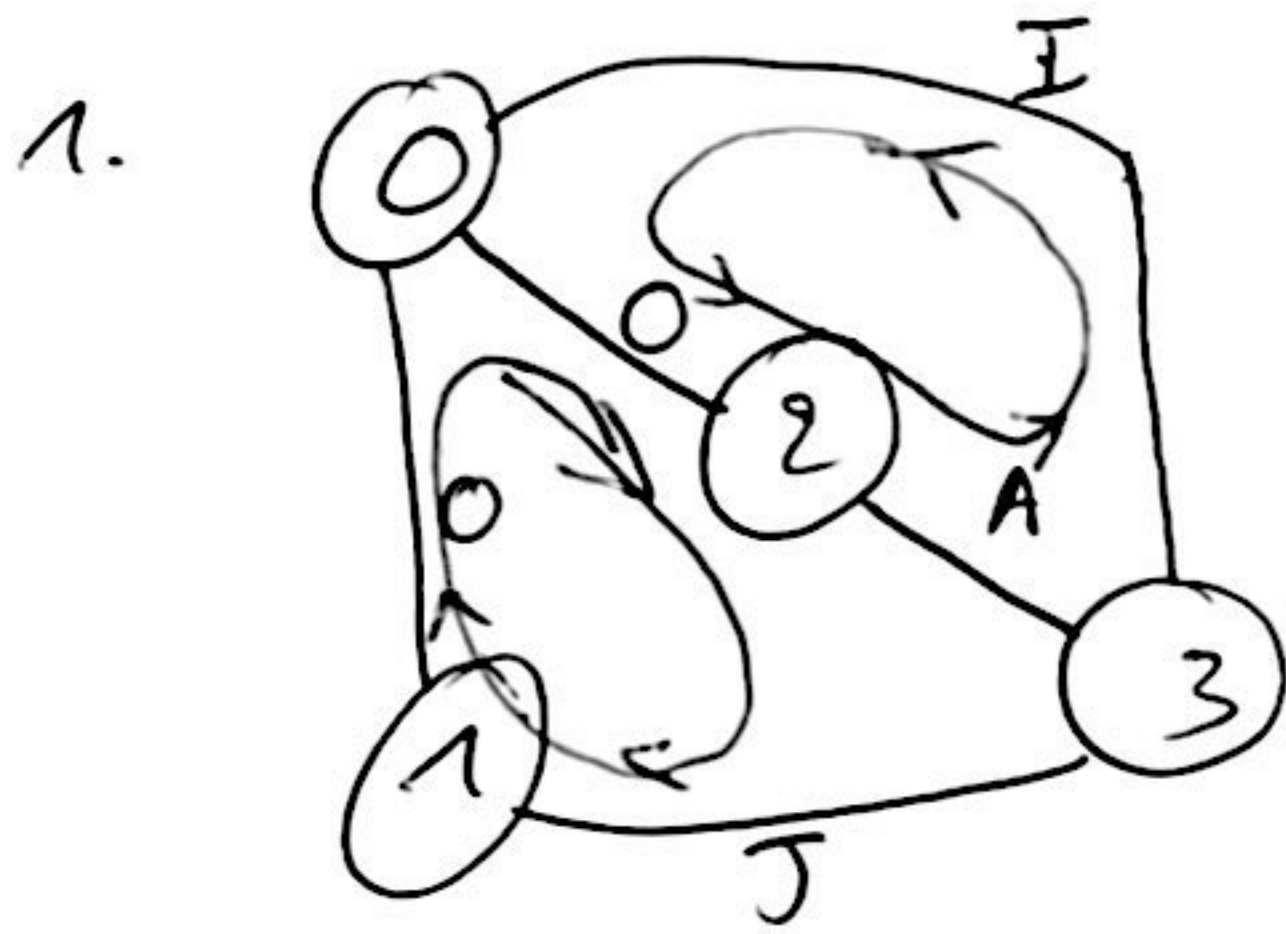
on trouve alors $\xi = \frac{1602}{2\sqrt{2 \cdot 10^4 \cdot 250}} = 0,35$

et $G_{dB}(\omega_r) = 20 \log \left(\frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \right) = 20 \log(1,5) = 3,5 \text{ dB}$

$$f \uparrow \Rightarrow \xi \uparrow \Rightarrow |H(j\omega_r)| \downarrow$$

le coefficient d'amortissement améliore l'amortissement et réduit la pulsation de résonance ainsi que son amplitude (gain à la résonance réduit d'un facteur 8 environ ici)

REDUCTEUR EPICYCLOIDAL



2. $\{V^1_0\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{10} \vec{e}_2 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_0$; $\{V^2_0\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{20} \vec{e}_2 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_0$; $\{V^3_2\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{32} \vec{e}_2 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$

$\{V^3_0\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{30} \vec{e}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_I$; $\{V^3_1\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{31} \vec{e}_2 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_J$

3. On traduit les 2 fermetures cinématiques du graphe :

$\{V^3_0\} + \{V^2_0\} + \{V^2_3\} = \{0\} \Rightarrow \vec{V}(I^3_0) + \vec{V}(I^2_0) + \vec{V}(I^2_3) = \vec{0}$

$\{V^3_1\} + \{V^1_0\} + \{V^0_2\} + \{V^2_3\} = \{0\} \Rightarrow \vec{V}(J^3_1) + \vec{V}(J^1_0) + \vec{V}(J^0_2) + \vec{V}(J^2_3) = \vec{0}$

les RSG en I et J se traduisent respectivement par :

$\vec{V}(I^3_0) = \vec{0}$ et $\vec{V}(J^3_1) = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{V}(I^2_0) = \vec{V}(I^2_3)$ et $-\vec{V}(J^1_0) + \vec{V}(J^0_2) = \vec{V}(J^2_3)$

On peut alors déterminer par changement de point :

$\vec{V}(I^2_0) = -R_0 \omega_{20} \vec{x}_2$; $\vec{V}(I^2_3) = -R_3 \omega_{23} \vec{x}_2$

$\vec{V}(J^1_0) = -R_1 \omega_{10} \vec{x}_2$; $\vec{V}(J^0_2) = -R_1 \omega_{20} \vec{x}_2$; $\vec{V}(J^2_3) = +R_3 \omega_{23} \vec{x}_2$

Ainsi on obtient les relations scalaires :

$-R_0 \omega_{20} = -R_3 \omega_{23}$ ① ; $R_1 \omega_{10} - R_1 \omega_{20} = R_3 \omega_{23}$ ②

① et ② $\Rightarrow +R_0 \omega_{20} = R_1 \omega_{10} - R_1 \omega_{20}$

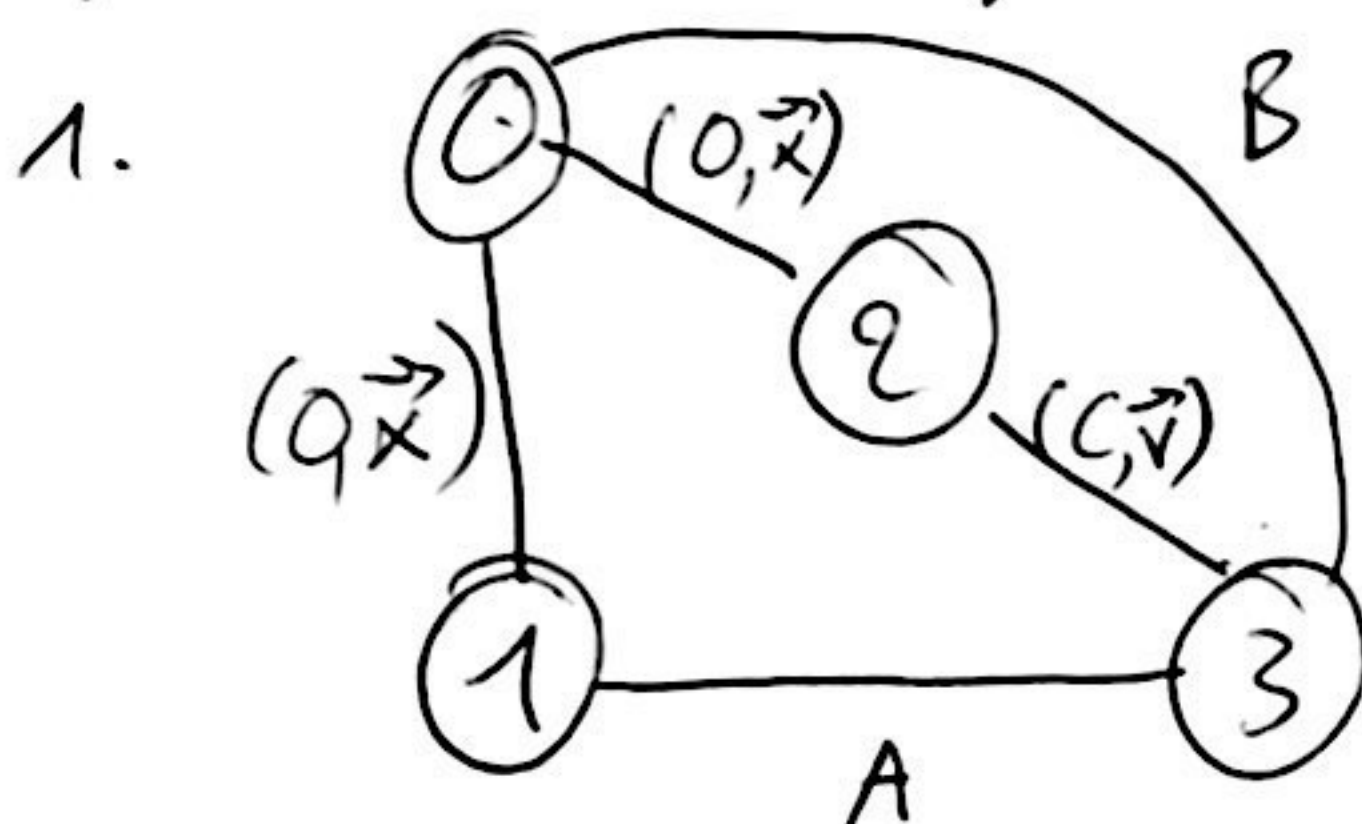
d'où $(R_0 + R_1) \omega_{20} = R_1 \omega_{10}$

et $\boxed{\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{R_1}{R_0 + R_1} = \frac{z_1}{z_0 + z_1}}$

A.N.: $\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{36}{72+36} = \frac{1}{3} = 0,33$

REDUCTEUR POUR HELICE D'AVION

C'est la même méthode mais les surfaces primitives sont des cônes et les axes des liaisons pivots ne sont pas tous parallèles.



2. $\{V^1_0\} = \begin{Bmatrix} \omega_{10} \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$; $\{V^2_0\} = \begin{Bmatrix} \omega_{20} \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$
 $\{V^3_1\} = \begin{Bmatrix} \omega_{31} \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O,C}$; $\{V^3_0\} = \begin{Bmatrix} \omega_{30} \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$
 $\{V^3_1\} = \begin{Bmatrix} \omega_{31} \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$

3. $\begin{cases} \vec{V}(B^3_0) + \vec{V}(B^0_2) + \vec{V}(B^2_3) = \vec{0} \\ \vec{V}(A^3_1) + \vec{V}(A^1_0) + \vec{V}(A^0_2) + \vec{V}(A^2_3) = \vec{0} \\ \vec{0} - \frac{m \cdot z_0}{2} \omega_{20} \vec{z} + \frac{m \cdot z_1}{2} \omega_{10} \vec{z} = \vec{0} \\ \vec{0} + \frac{m \cdot z_1}{2} \omega_{10} \vec{z} - \frac{m \cdot z_1}{2} \omega_{20} \vec{z} - \frac{m \cdot z_3}{2} \omega_{31} \vec{z} = \vec{0} \end{cases}$

car par changement de point

$\vec{V}(B^0_2) = -\vec{V}(B^2_0) = -\vec{V}(O^2_0) - \vec{BO} \wedge \Omega^2_0 = \vec{0} - (\lambda \vec{x} - \frac{m \cdot z_0}{2} \vec{y}) \wedge \omega_{20} \vec{z}$
 avec $\vec{x} \wedge \vec{x} = \vec{0}$ et $\vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{z}$

$$\text{et } \vec{V}(B_{1/3}^2) = \vec{V}(C_{1/3}^2) + \vec{BC} \wedge \vec{\Omega}_3^2$$

$$= \vec{0} + \frac{m z_3}{2} \vec{u} \wedge \omega_{23} \vec{V} = \frac{m z_3}{2} \omega_{23} \vec{z}$$

$$\vec{V}(A_{1/3}^2) = \vec{V}(C_{1/3}^2) + \vec{AC} \wedge \vec{\Omega}_3^2 = -\frac{m z_3}{2} \vec{u} \wedge \omega_{23} \vec{V} = -\frac{m z_3}{2} \omega_{23} \vec{z}$$

$$\vec{V}(A_{1/0}^1) = \frac{m z_1}{2} \omega_{10} \vec{z}$$

$$\vec{V}(A_{1/0}^2) = \frac{m z_1}{2} \omega_{20} \vec{z}$$

et le non glissement $\vec{V}(A_{1/1}^3) = \vec{0}$ et $\vec{V}(B_{1/0}^3) = \vec{0}$

d'où $\left\{ \begin{array}{l} z_0 \omega_{20} = z_3 \omega_{23} \quad (1) \\ z_1 \omega_{10} - z_1 \omega_{20} = z_3 \omega_{23} \quad (2) \end{array} \right.$

(1) et (2) $\Rightarrow z_0 \omega_{20} = z_1 (\omega_{10} - \omega_{20})$

$$\Rightarrow \left[\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{z_1}{z_0 + z_1} \right]$$

$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{85}{64 + 85} ; \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = 0,57$$

$$4. \frac{\omega_{32}}{\omega_{10}} = \frac{\omega_{32}}{\omega_{20}} \cdot \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \left[-\frac{z_0}{z_3} \cdot \frac{z_1}{z_0 + z_1} = \frac{\omega_{32}}{\omega_{10}} \right]$$

$$\left[\frac{\omega_{32}}{\omega_{10}} = -\frac{64}{41} \cdot 0,57 = -0,89 \right]$$