Statique des solides

Théorème 1 :
Dans un repère galiléen, pour qu'un solide initialement au repos (ou en mouvement uniforme) et soumis à l'action de deux forces (en A et B) reste au repos (ou en mouvement uniforme), il est nécessaire et suffisant que ces deux forces soient directement opposées (selon (AB)) et d'intensité égale.

Démonstration :

On considère le solide S soumis à 2 forces $\overrightarrow{R_A}$ en A et $\overrightarrow{R_B}$ en B correspondant aux torseurs glisseurs respectivement $\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_A} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ et $\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_B} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$

L'application du PFS en A donne :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} = \vec{0} & résultantes \\ \vec{0} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_B} = \vec{0} & moments \end{cases}$$

Donc si $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ alors on a : $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{R_B}$ colinéaires et $\overrightarrow{R_A} = -\overrightarrow{R_B}$ soit

« deux forces directement opposées (selon (AB)) »

Théorème 2 :
Dans un repère galiléen, pour qu'un solide initialement au repos (ou en mouvement uniforme) et soumis à l'action de trois forces reste au repos (ou en mouvement uniforme), il est nécessaire et suffisant que ces trois forces :

• soient coplanaires,

• aient leur somme géométrique nulle,

• soient concourantes au même point ou alors parallèles entre elles. Dans ce cas, les distances entre les directions parallèles sont respectivement inversement proportionnelles aux intensités des forces portées par ces directions.

Démonstration :

On considère le solide S soumis à 3 forces $\overrightarrow{R_A}$ en A, $\overrightarrow{R_B}$ en B et $\overrightarrow{R_C}$ en C, correspondant aux torseurs glisseurs respectivement $\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_A} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$, $\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_B} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$ et $\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_C} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$ avec A, B et C bien distincts.

L'application du PFS en un point M quelconque donne :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} + \overrightarrow{R_C} = \vec{0} & (1) \\ \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{R_B} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{R_C} = \vec{0} & (2) \end{cases}$$

D'après (1) si 2 des forces sont de directions parallèles alors la 3ème leur est forcément parallèles.

On rappelle $\vec{M}\left(A, \overrightarrow{R_B}\right) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{R_B} = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| \|\overrightarrow{R_B}\| \left|\sin\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{R_B}\right)\right| \vec{w}$ et l'interprétation graphique qui en découle :

$\left\|\vec{M}\left(A, \overrightarrow{R_B}\right)\right\| = \mathrm{d}\left(A, \left(B, \overrightarrow{R_B}\right)\right) \left\|\overrightarrow{R_B}\right\| = AH_B . \left\|\overrightarrow{R_B}\right\|$ où AH_B est la distance « bras de levier » par rapport à A de la force en B

L'équation (2) donne alors :

Pour M=A $\quad \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_B} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{R_C} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{AH_B}{AH_\mathrm{C}} = \frac{\|\overrightarrow{R_C}\|}{\|\overrightarrow{R_B}\|}$

Pour M=B $\quad \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{R_C} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{BH_A}{BH_\mathrm{C}} = \frac{\|\overrightarrow{R_C}\|}{\|\overrightarrow{R_A}\|}$

Pour M=C $\quad \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{R_B} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{CH_A}{CH_\mathrm{B}} = \frac{\|\overrightarrow{R_B}\|}{\|\overrightarrow{R_A}\|}$

Ce qui se traduit en français par « les distances entre les directions parallèles sont respectivement inversement proportionnelles aux intensités des forces portées par ces directions. »

Sinon, supposant 2 des 3 forces non parallèles donc concourantes, on considère M intersection de 2 des 3 axes centraux tel que : $M = \left(A, \overrightarrow{R_A}\right) \cap \left(\mathrm{B}, \overrightarrow{R_B}\right)$.

Ainsi l'équation 2 devient $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{R_C} = \vec{0}$ relation vérifiée par tout point M de l'axe central de la force $\overrightarrow{R_C}$.

Cela traduit donc que M est un point d'intersection des 3 axes centraux des 3 forces et qu'elles sont donc concourantes.