

Annexe du cours de Statique des solides Modélisation des actions de contact

On rappelle qu'une action mécanique répartie dans l'espace peut être exprimée localement par la force élémentaire au point courant M ou globalement par le torseur correspondant avec ses éléments de réduction (résultante et moment en un point) :

$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{i \rightarrow j} = \int_{M \in S} d\vec{F}_{i \rightarrow j} \\ \vec{M}(A, i \rightarrow j) = \int_{M \in S} \vec{AM} \wedge d\vec{F}_{i \rightarrow j} \end{array} \right\}_A$$

Cette action peut être répartie sur une ligne (droite ou non), une surface ou un volume. Cela correspond donc à une intégrale simple, double ou triple pour calculer les résultante et moment de cette action mécanique.

Les exemples vus en TD :

- action de pression hydrostatique de l'eau sur le barrage sur une surface plane
- action de pesanteur sur le barrage répartie dans le volume prisme trapézoïdal du barrage
- action de pression de contact d'un coussinet en bronze cylindrique sur un axe dans une liaison pivot glissant répartie sur la surface d'un demi-cylindre.

Pour exprimer les forces élémentaires il faut alors utiliser le système de coordonnées adapté à la géométrie du modèle proposé.

$$d\vec{F}_{i \rightarrow j} = \lambda(M) \cdot \vec{u}(M) \cdot d\mu$$

où

$d\vec{F}_{i \rightarrow j}$: force élémentaire,

$\lambda(M)$: répartition linéique (en $N \cdot m^{-1}$), surfacique (en $N \cdot m^{-2}$), volumique de force (en $N \cdot m^{-3}$),

$\vec{u}(M)$: vecteur unitaire dirigeant et orientant cette force en M,

$d\mu$: élément géométrique de ligne, de surface ou de volume autour du point courant M.

En particulier on trouvera dans les sujets de SI des répartitions surfaciques de forces correspondant aux actions de pression de contact entre solides, ou entre un fluide et un solide, telles que :

$$d\vec{F}_{i \rightarrow j} = p(M) \cdot \vec{n}(M) \cdot dS$$

où

$d\vec{F}_{i \rightarrow j}$: force élémentaire de pression de contact

$p(M)$: pression de contact en $Pa = N \cdot m^{-2}$

$\vec{n}(M)$: vecteur unitaire normal à la surface et orienté de i vers j.

dS : élément de surface autour de M.

L'expression de dS dépend alors des coordonnées permettant de décrire la position du point M et la surface élémentaire qui l'entoure.

Ainsi on sera amené à écrire dS en coordonnées cartésiennes, cylindrique (polaire), ou sphérique.

En cartésiennes : $dS = dx \cdot dy$ par exemple

En cylindriques : $dS = r \cdot d\theta \cdot dr$

En sphériques : $dS = r^2 \cdot d\theta \cdot d\psi \cdot \sin \theta$ (exemple page suivante)

Clapet à bille

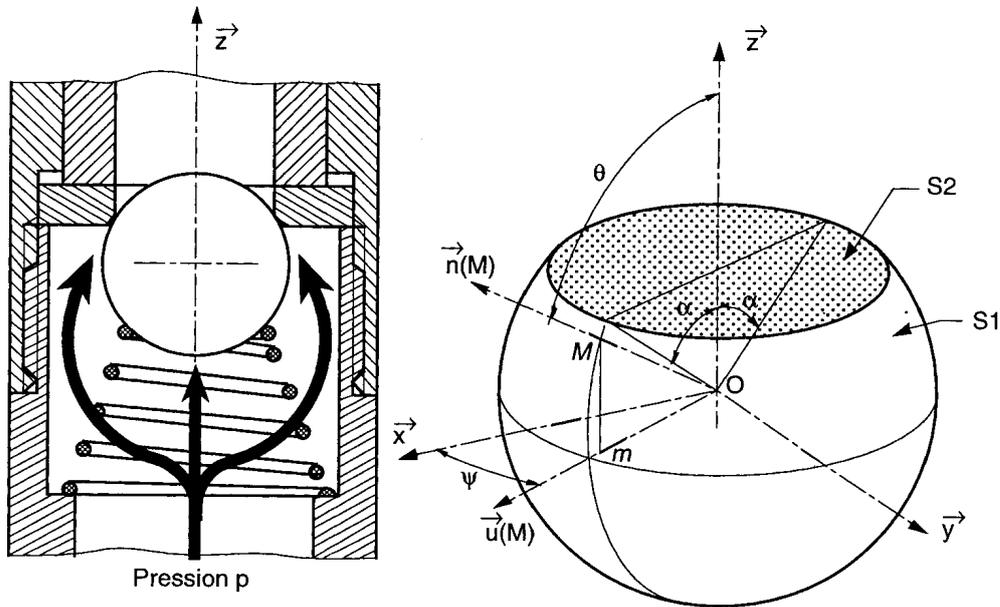


Figure 1

La figure 1 représente un clapet à bille dont le rôle est d'obturer une canalisation servant au transport de l'air comprimé dans une installation pneumatique.

L'étude a pour but de comparer les actions respectives de l'air et du ressort sur la bille du clapet.

Lorsque le clapet est fermé, l'action du ressort est représentable par un glisseur d'axe (O, \vec{z}) dont la norme est égale à 1,5 N :

La pression de l'air est uniformément répartie sur la surface S_1 de la bille : $P(M)=p_0$ qui est constante quel que soit le point de contact air/bille.

Le rayon de la bille est égal à R .

Déterminons dans ces conditions le torseur représentatif de l'action de l'air sur la bille noté :

$$\{T_{a \rightarrow b}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{m}_{O, a \rightarrow b} \end{array} \right\}_O .$$

1. Démontrer que $\vec{m}_{O, a \rightarrow b} = \vec{0}$
2. Déterminer \vec{R} .

On rappelle que la surface élémentaire dS située autour du point M sur une calotte sphérique s'exprime en coordonnées sphériques : $dS = R^2 \cdot d\theta \cdot d\psi \cdot \sin \theta$