INTRODUCTION A LA MECANIQUE DES SOLIDES : GEOMETRIE DES CHAINES DE SOLIDES

La mécanique du solide est l'étude des mouvements et des efforts transmis dans un mécanisme supposé constitué de **solides** en **liaisons** entre eux.
L'objectif de ce cours est de traduire les relations géométriques entre positions et orientations des différents solides dans un mécanisme, permettant ainsi de valider certaines exigences du CdCF d'un système ou de déterminer un modèle géométrique pour le pilotage d'un mécanisme ou la simulation de son comportement dans un asservissement (fonction de transfert du transmetteur par exemple).

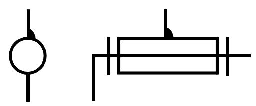
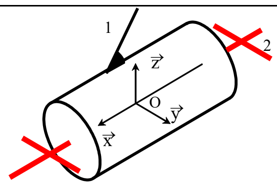
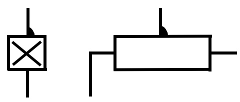
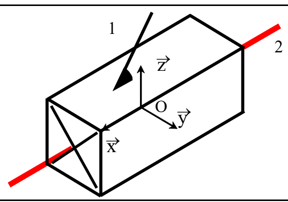
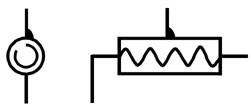
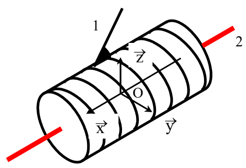
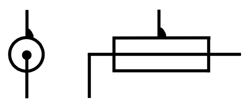
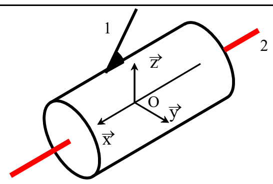
1. DÉFINITION DU SOLIDE INDÉFORMABLE

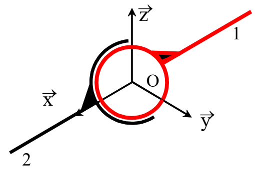
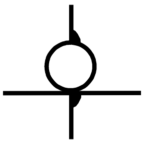
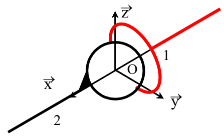
On appelle système matériel un ensemble de points matériels.
Un **solide** (indéformable) S est un système matériel, tel que la distance entre deux points A et B appartenant à ce système, reste constante au cours du temps : $\forall A \in S$ et $\forall B \in S$, $||\overrightarrow{AB}||$ = cste.

On peut donc associer un **repère orthonormé direct** à un solide et ainsi avoir une équivalence entre mouvement du solide et mouvement du repère.

2. DÉFINITION D'UNE LIAISON MECANIQUE ENTRE SOLIDES

Les contacts entre solides imposent les possibilités de mouvements des solides entre eux. On peut alors associer à chaque type de contact un nom de **LIAISON** et des mouvements possibles entre solides. On parle de degrés de liberté constitués des 3 translations et 3 rotations (changement d'orientation) possibles.

Liaison	Schéma cinématique 2D	Schéma cinématique 3D	Degrés de libertés		
Liaison pivot d'axe $(0,\vec{x})$				T	R
			X		
			Y		
			Z		
Liaison glissière de direction $\vec{x}$				T	R
			X		
			Y		
			Z		
Liaison hélicoïdale d'axe $(0,\vec{x})$				T	R
			X		
			Y		
			Z		
Liaison pivot glissant d'axe $(0,\vec{x})$				T	R
			X		
			Y		
			Z		

				T	R
Liaison sphérique (ou rotule) de centre O			X		
			Y		
			Z		
Liaison sphère plan (ou ponctuelle) de centre O plan tangent au contact $(O, \vec{y}, \vec{z})$				T	R
			X		
			Y		
			Z		

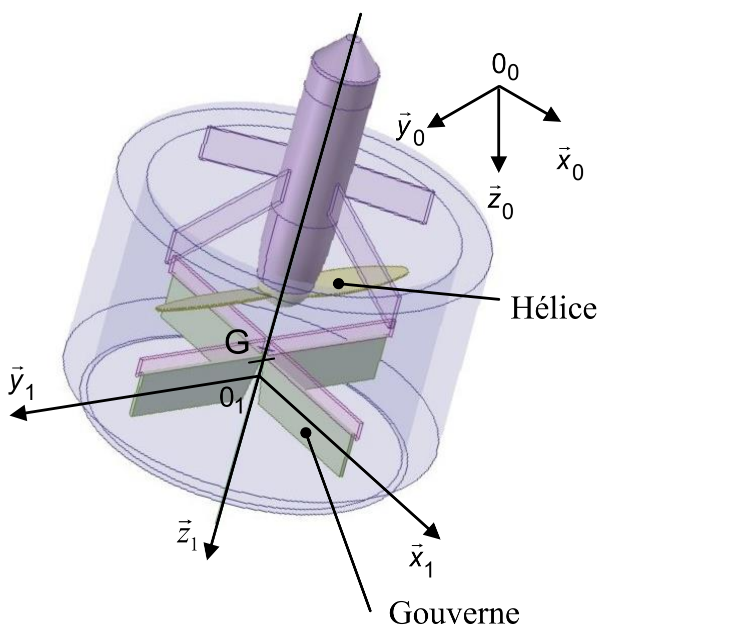
3. PARAMETRAGE DE LA POSITION D'UN SOLIDE DANS L'ESPACE

Le mouvement d'un solide par rapport à un repère est paramétré par 6 paramètres.
En effet on peut associer à un solide i un repère orthonormé direct $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$, et la position du solide est alors définie par la position de ce repère par rapport à un repère de référence $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
Pour positionner un repère par rapport à un autre, il faut définir la position de l'origine par les **3 composantes du vecteur** $\overrightarrow{O_0O_i}$ ainsi que **l'orientation des 3 vecteurs** de la base associée à R_i par rapport à ceux de la base associée à R_0.

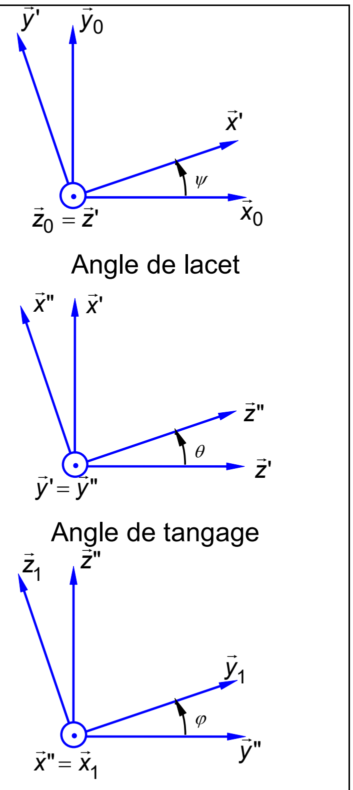
Exemple du drone (sujet Mines Ponts 2010)

$\overrightarrow{O_0G} = x(t)\vec{x}_0 + y(t)\vec{y}_0 + z(t)\vec{z}_0$ 3 paramètres de position

$(\psi(t), \theta(t), \varphi(t))$ 3 angles de lacet, tangage, roulis (ou 3 angles d'Euler)



$$\overrightarrow{O_0G} = x\,\vec{x}_0 + y\,\vec{y}_0 + z\,\vec{z}_0$$



Le pilotage du drone consiste alors à asservir à des consignes les valeurs de ces 6 paramètres à chaque instant dans la mesure du possible.

Les angles utilisés sont souvent roulis-tangage-lacet (automobile, aéronautique,…) mais il en existe d'autre comme en robotique où l'ont parle plutôt de précession-nutation-rotation propre dont la définition est légèrement différente.

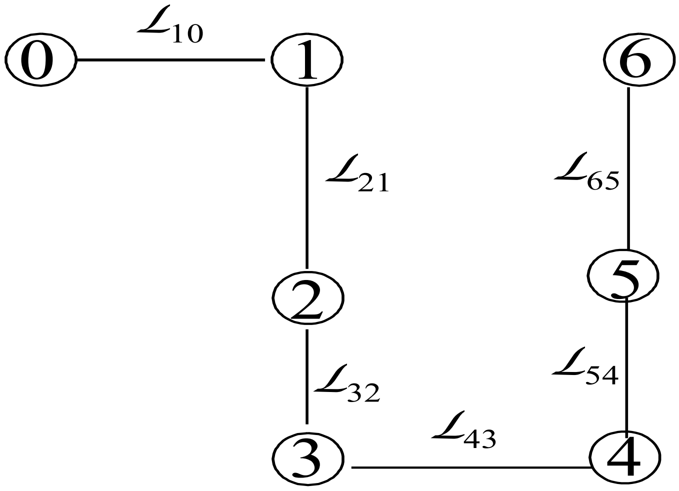
Il faut donc comprendre que le paramétrage de la position variable d'un solide dans l'espace ou dans un mécanisme se fait par rapport à un repère donné.

4. PARAMETRAGE GEOMETRIQUE D'UN MECANISME

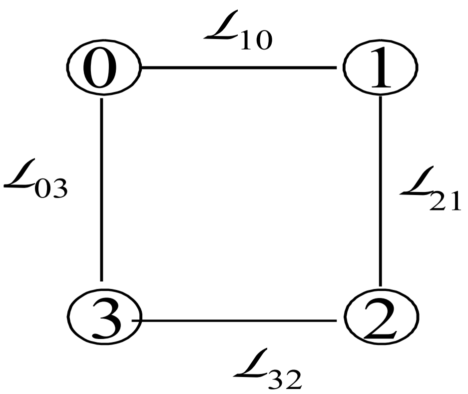
4.1. Graphe de liaisons :

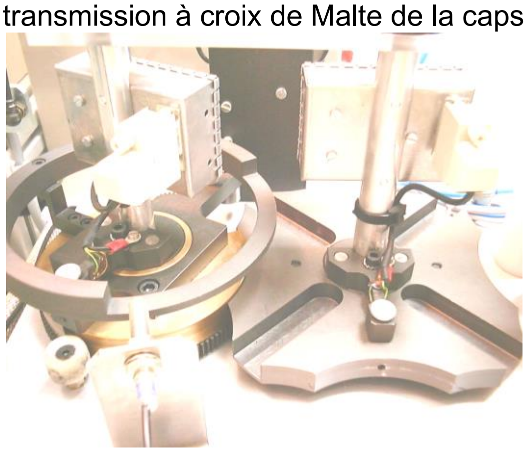
On définit un mécanisme par un ensemble de solides i en mouvements relatifs par un graphe de liaisons. Les solide i sont représentés par leur numéro dans un « rond » et les liaisons par des traits les reliant. Cette représentation très synthétique est un outil très utile en mécanique des solides. Il permet de traduire les compositions de mouvements utiles dans l'étude cinématique ou de choisir des sous systèmes à isoler dans l'étude des efforts transmis.

On peut avoir des graphes ouverts (mécanique principale du bras de robot Ericc3)



On peut avoir des graphes fermés (mécanisme de transmission à croix de Malte de la capsuleuse)





On associe généralement à chaque solide i un repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ orthonormé direct.

4.2. Schéma cinématique paramétré

Le schéma cinématique est la représentation schématique minimale permettant d'identifier les solides et liaisons du mécanisme pour une étude donnée. Les solides sont représentés par des traits et les liaisons par les symboles normalisés du tableau.
Les solides correspondent à des ensembles de pièces immobiles entre elles dans le mouvement étudié du mécanisme. On parle de classe d'équivalence cinématique.
Dans un premier temps l'identification des solides et des mouvements entre les solides n'étant pas évident, on prendra soin, si ce n'est pas déjà fait, d'associer des couleurs aux différents solides.
Le mouvement associé à une liaison pivot est une rotation autour de l'axe de la liaison.
Le mouvement associé à une liaison glissière est une translation rectiligne selon la direction de la glissière.
On prendra soin de ne pas confondre les noms des liaisons avec celui des mouvements associés ou des trajectoires de points associés.

Exemple 1 : rotor d'hélicoptère

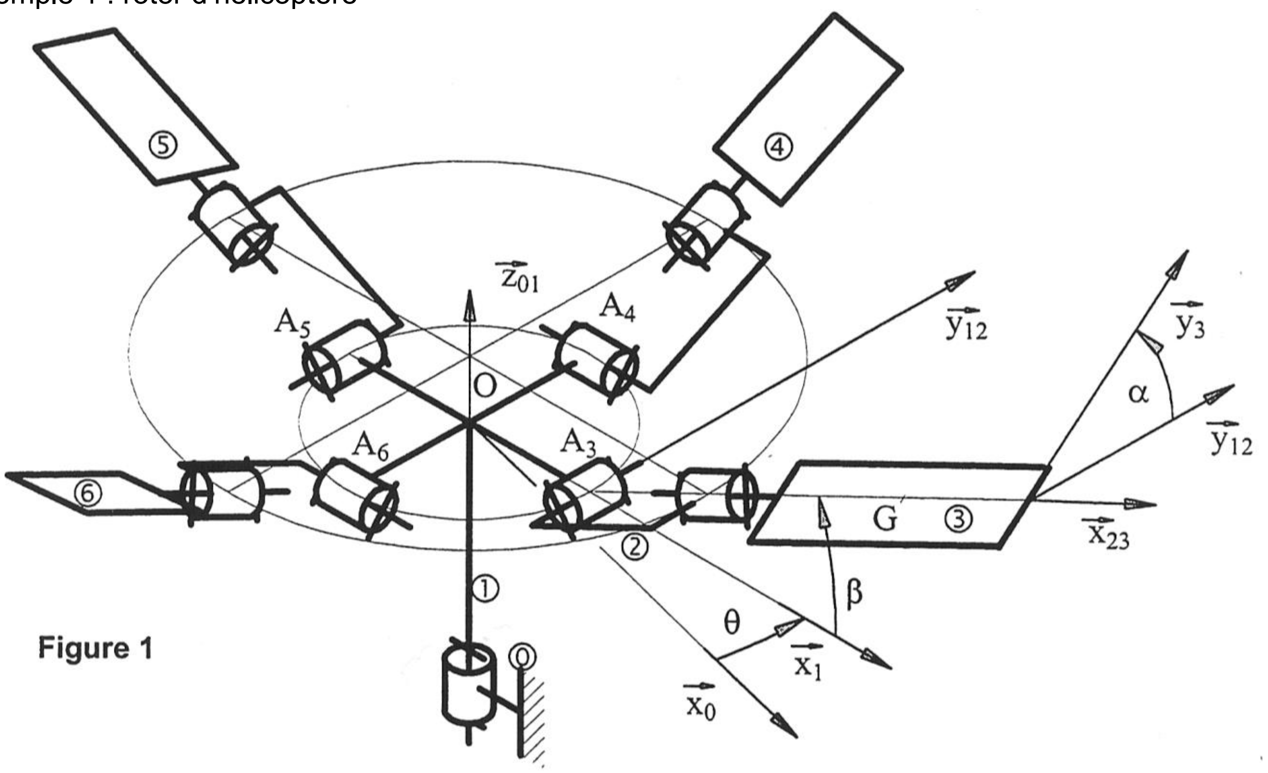
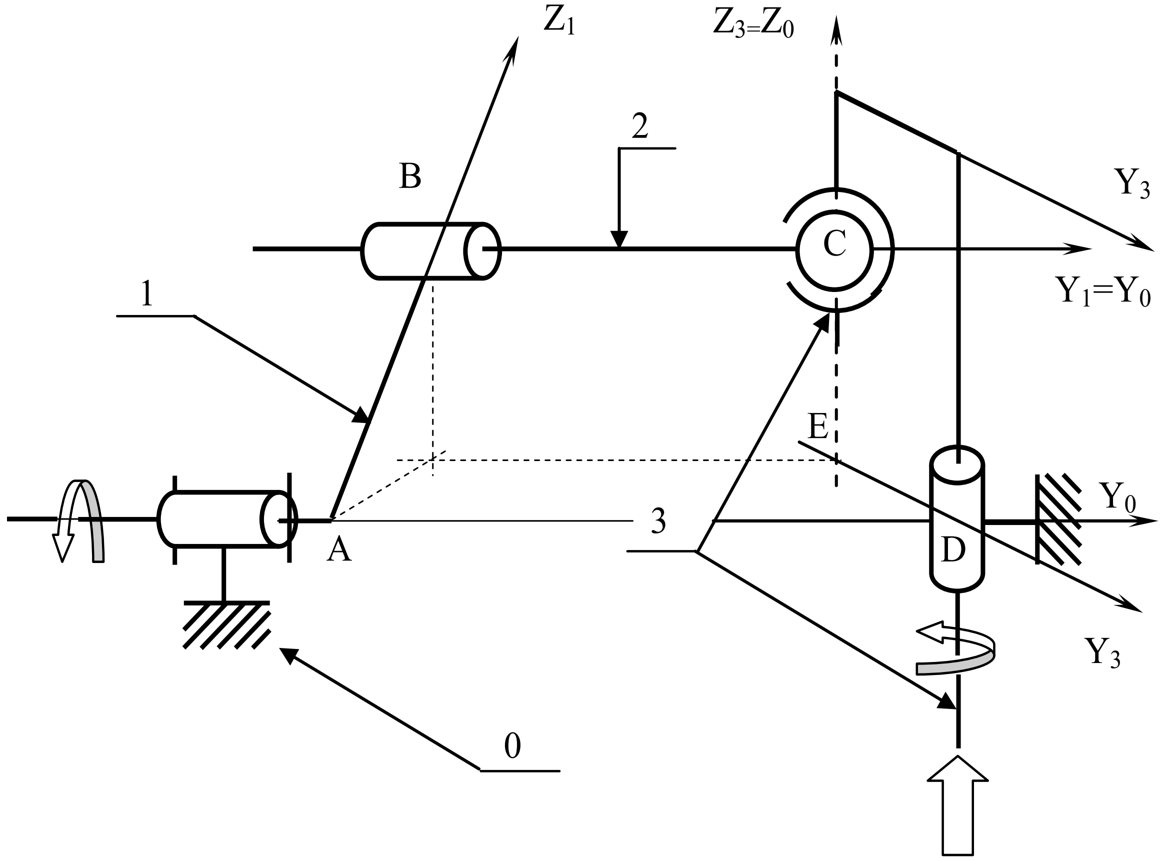


Figure 1

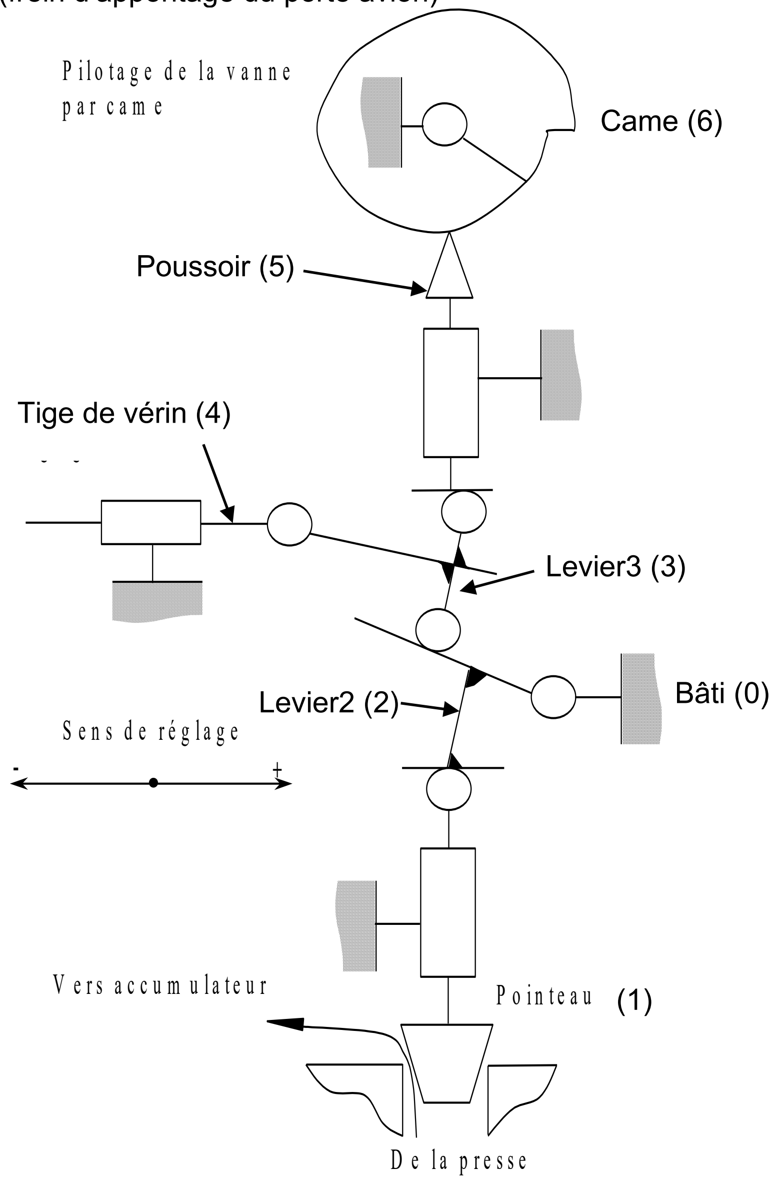
Correspondant au graphe de liaison : *à compléter*

Exemple 2 : malaxeur de matériaux pâteux



Correspondant au graphe de liaison : *à compléter*

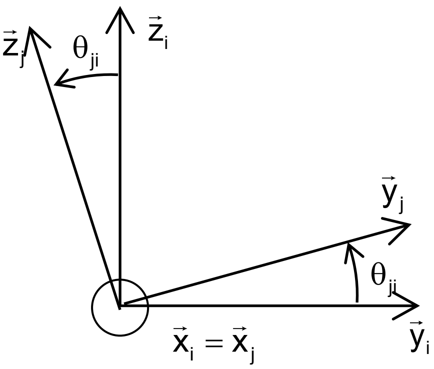
Exemple 3 : mécanisme de réglage de hauteur de pointeau dans une vanne de laminage (frein d'appontage du porte avion)



Correspondant au graphe de liaison : *à compléter*

4.3. Figures planes de calcul

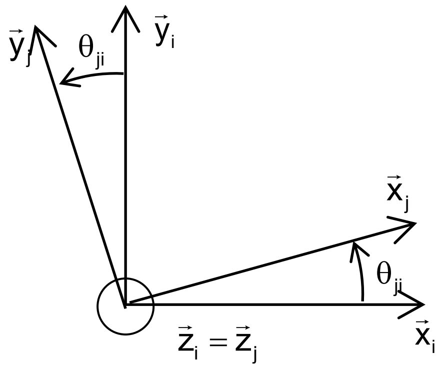
On représente ainsi les orientations des solides par les **figures planes** (ou figures de calcul ou figures de changement de base) représentant les rotations planes des bases orthonormées directes les unes par rapport aux autres.

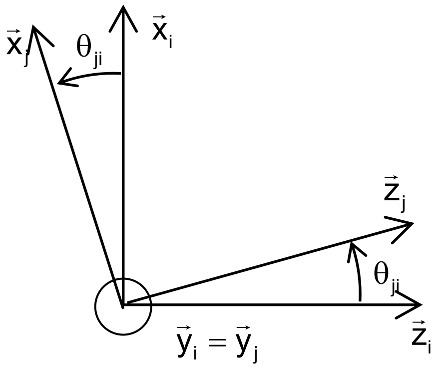


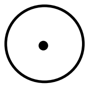
Lorsque $\theta_{ji}(t) = \left(\vec{y}_i(t), \vec{y}_j(t)\right) = \left(\vec{z}_i(t), \vec{z}_j(t)\right)$ angle orienté entre les 2 vecteurs unitaires de 2 repères associés à 2 solides différents en mouvement l'un par rapport à l'autre pour lesquels $\vec{x}_i(t) = \vec{x}_j(t)$.
On retrouve cette figure pour les liaisons autorisant une rotation autour d'un axe (droite dans l'espace), comme par exemple la liaison pivot d'axe $(O_i, \vec{x}_i)$.
On remarque que, dans un souci d'allègement de l'écriture, la variable temps n'est pas précisée, car les caractères variables ou constants des grandeurs géométriques sont spécifiés par le schéma cinématique paramétré et/ou le graphe de liaison.

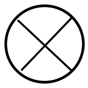
L'angle sera presque toujours représenté avec une **valeur algébrique de +20°** environ de manière à simplifier la lecture des projections (produits scalaires) des vecteurs unitaires entre eux dans les développements de calculs en géométrie, cinématique et statique des solides en 1ère année.
On rappelle que, dans une base directe, l'angle est représenté orienté positivement de $\vec{x}_i$ vers $\vec{y}_i$, $\vec{y}_i$ vers $\vec{z}_i$ ou de $\vec{z}_i$ vers $\vec{x}_i$.

On peut de même retrouver des figures planes avec les vecteurs unitaires orientés les uns par rapport aux autres des 2 autres manières suivantes :





vecteur « vers nous » représenté dans le plan de la feuille par : 

vecteur « vers le fond » représenté dans le plan de la feuille par : 

On propose alors dans les sujets de représenter les angles variables toujours de cette manière. Les angles seront parfois indicés avec les indices (numéros des 2 solides concernés) parfois non. Parfois les lettres grecques habituelles sont utilisées lorsqu'elles sont en nombres limités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \Psi, \ldots$

Les paramètres de longueur algébrique ou d'angle variables ou constants au cours du temps constitue le paramétrage du mécanisme qui permettra l'étude de son mouvement.

On associe à chaque solide d'un mécanisme un nombre fini de vecteur de norme constante ($||\overrightarrow{AB}||$ = cste)

5. FERMETURE GEOMETRIQUE

Pour établir les relations entre paramètres géométriques variables dans un mécanisme, il suffit généralement d'exprimer une fermeture géométrique correspondant à une relation de Chasles sur les vecteurs caractérisant les solides ou les bipoints de longueurs variables du mécanisme. En projetant ces relations vectorielles sur les directions d'une base orthonormée directe, on obtient jusqu'à 3 relations scalaires utiles à la résolution.

Exemple : système « bielle-manivelle »
Mécanisme classiquement utilisé pour la transformation de mouvement dans les moteurs thermiques pour transformer l'énergie « mécanique de translation » en énergie « mécanique de rotation ».

Dessin :

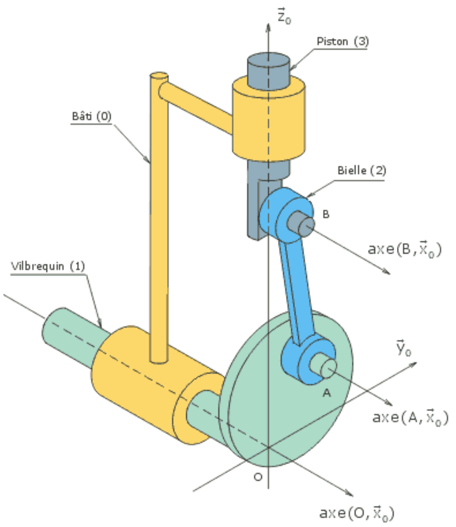
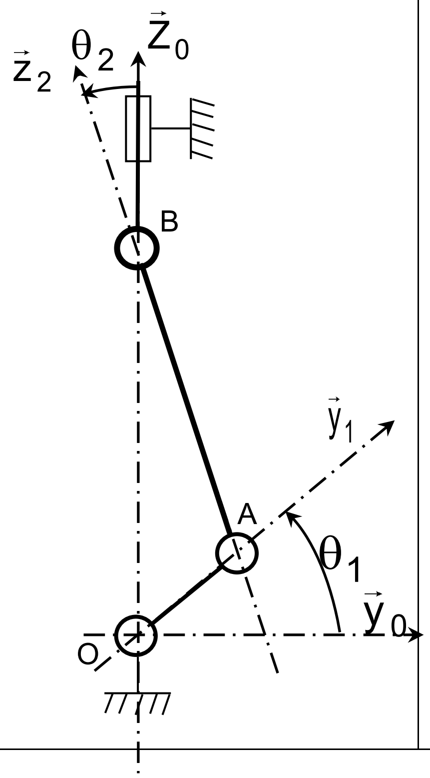


Schéma cinématique paramétré :



Graphe de liaison :

Paramétrage géométrique du mécanisme :

- $OA = e\,;\quad AB = L$ longueurs constantes des solides 1 et 2
- $OB = \lambda(t)\,;\,(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1;\,(\vec{z}_0, \vec{z}_2) = \theta_2$ grandeurs variables paramétrant les mouvements

La fermeture géométrique s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$$

$$e\vec{y}_1 + L\vec{z}_2 - \lambda\vec{z}_0 = \vec{0} \quad (e)$$

On peut alors obtenir les relations entre paramètres scalaires représentant les mouvements en projetant cette dernière relation vectorielle sur les directions d'une des bases associées aux solides. Le plus simple étant généralement de prendre la base « fixe » associée au bâti (pièce « fixe »).

(e) projetée sur la direction $\vec{x}_0$ donne :

0=0 on parle alors de **problème plan de normale** $\vec{x}_0$**.**

(e) projetée sur la direction $\vec{y}_0$ donne :

$$e\cos(\theta_1) - L\sin(\theta_2) - 0 = 0$$

(e) projetée sur la direction $\vec{z}_0$ donne :

$$e\sin(\theta_1) + L\cos(\theta_2) - \lambda = 0$$

Il s'agit ensuite d'exprimer les relations entre les paramètres géométriques variables.

On distinguera parmi celles-ci la relation entrée-sortie géométrique. Ici c'est la relation entre λ et θ_1.

Pour obtenir les relations attendues à partir d'un tel système d'équations non linéaire (du fait des fonctions trigonométriques) il faut procéder à des combinaisons non linéaires de ces équations en utilisant généralement les relations trigonométriques :

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) \quad ; \quad \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Ces relations permettent d'éviter une substitution fastidieuse dans les relations scalaires pour supprimer un paramètre variable de nos relations scalaires.

6. RAPPEL SUR LE PRODUIT SCALAIRE

Le produit scalaire dans un espace euclidien est une opération de $\mathbb{R}^3 x \mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$$

Le produit scalaire a les principales propriétés suivantes :

Commutatif : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Distributif par rapport à l'addition : $\vec{u}.\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) = \vec{u}.\vec{v}_1 + \vec{u}.\vec{v}_2$

Compatible avec la multiplication par un scalaire : $\vec{u}.\left(\lambda_1.\vec{v}_1\right) = \lambda_1.\vec{u}.\vec{v}_1$

On pourra donc développer des expressions de la manière suivante : $\vec{u}.\left(\lambda_1.\vec{v}_1 + \lambda_2.\vec{v}_2\right) = \lambda_1.\vec{u}.\vec{v}_1 + \lambda_2.\vec{u}.\vec{v}_2$

Si les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont données dans une même base de projection, alors on peut exprimer la valeur algébrique du produit scalaire :

Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z$

On parlera indifféremment de **projection** ou de **décomposition** dans une base donnée. En effet, l'expression des différentes composantes d'un vecteur dans une base sont telles que :

$$\vec{v} = v_x.\vec{x} + v_y.\vec{y} + v_z.\vec{z} = \left(\vec{v}.\vec{x}\right).\vec{x} + \left(\vec{v}.\vec{y}\right).\vec{y} + \left(\vec{v}.\vec{z}\right).\vec{z}$$

Ou

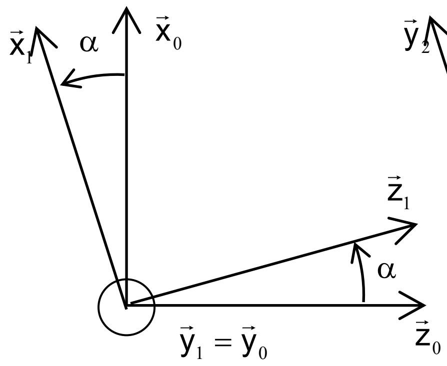
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}.\vec{x} \\ \vec{v}.\vec{y} \\ \vec{v}.\vec{z} \end{pmatrix}$$

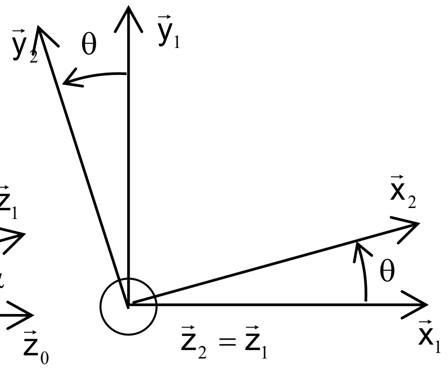
Exercices sur les produits scalaires :

1. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ exprimée dans une même base. Calculer leur produit scalaire.

   Déterminer l'angle entre ces vecteurs.

2. Soient les bases orthonormées directes représentées ci-dessous :
   Calculer les produits scalaires :
   a. $\vec{y}_2.\vec{y}_1$
   b. $\vec{y}_2.\vec{x}_1$
   c. $\vec{y}_1.(2.\vec{y}_2 + 3.\vec{x}_2)$
   d. $\vec{z}_0.\vec{x}_1$
   e. $\vec{x}_0.\vec{z}_2$
   f. $\vec{y}_2.\vec{x}_0$
   g. $\vec{x}_2.\vec{y}_0$

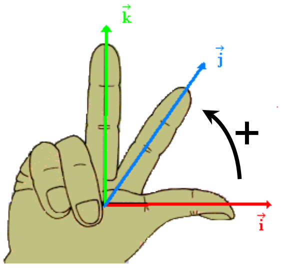




2. Exprimer les décompositions des vecteurs suivants dans la base 0 :
   a. $\vec{z}_1$
   b. $\vec{x}_1$
   c. $\vec{y}_2$
   d. $\vec{x}_2$

7. A QUOI CA SERT EN SII ?

C'est l'outil de calcul qui va nous permettre de caractériser les mouvements à l'aide de champs de vecteur dans l'espace orienté.
Pour orienter les mouvements, il faut définir un sens positif et un sens négatif de rotation dans l'espace.
Pour cela on peut s'appuyer sur la définition d'un trièdre direct (3 doigts de la main droite).
Un mouvement de rotation d'un objet dans un repère donné d'observation sera caractérisé par un axe de rotation (par exemple dirigé par $\vec{k}$), une vitesse de rotation (par exemple 3 tr/min soit $6\pi\,\text{rad.s}^{-1}$) et un sens de rotation de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$ ou de $\vec{j}$ vers $\vec{i}$.



les sens de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$, $\vec{j}$ vers $\vec{k}$ et $\vec{k}$ vers $\vec{i}$ sont positifs.

8. DEFINITION GEOMETRIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . |\sin(\vec{u},\vec{v})| . \vec{w}$

Avec $\vec{w}$ unitaire, $\vec{u} \perp \vec{w}$, $\vec{v} \perp \vec{w}$ et tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit un trièdre direct.

Exemple : sur le trièdre orthonormé ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

$\vec{i} \wedge \vec{j} =$

$\vec{k} \wedge \vec{j} =$

$\vec{i} \wedge \vec{k} =$

9. PROPRIETES DU PRODUIT VECTORIEL

Antisymétrie : $\vec{u} \wedge \vec{v} =$

Distributif par rapport à l'addition et compatible avec la multiplication par un scalaire :

$\vec{u} \wedge (\lambda_1 . \vec{v}_1 + \lambda_2 . \vec{v}_2) =$

10. DEFINITION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

Si les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont données dans une même base de projection, alors on peut exprimer les coordonnées du résultat $\vec{w}$ de leur produit vectoriel :

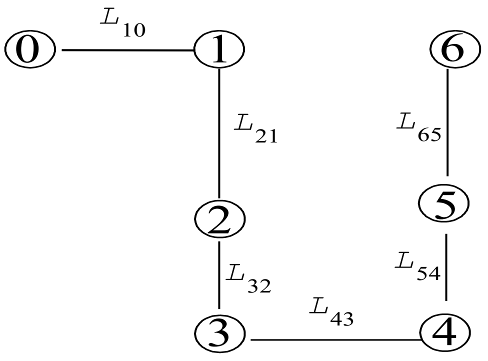
Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ alors $\vec{w} = \begin{pmatrix} u_y.v_z - u_z.v_y \\ u_z.v_x - u_x.v_z \\ u_x.v_y - u_y.v_x \end{pmatrix}$

THEOREMES DE DERIVATION VECTORIELLE

1. PARAMETRAGE ANGULAIRE D'UN MECANISME

On définit un mécanisme par un ensemble de solides i en mouvements relatifs par un graphe de liaisons.

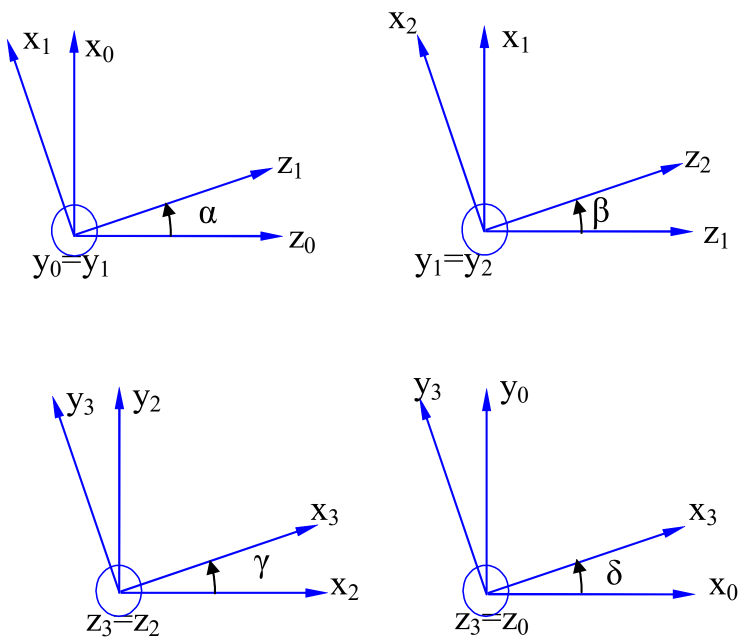
Exemple :



On associe généralement à chaque solide i un repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ orthonormé direct

On représente ainsi les orientations des solides par les figures planes (figures de calcul) représentant les rotations planes des bases orthonormées directes les unes par rapport aux autres.

Exemple :



2. DERIVEE D'UN VECTEUR UNITAIRE

2.1. Théorème

Soit $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en mouvement par rapport à $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0} = \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{x}_1}$$

où $\vec{\Omega}_{R1/R0}$ représente le vecteur (vitesse de) rotation de la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par rapport à la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

2.2. Démonstration

Elle s'appuie sur le fait qu'un vecteur unitaire a une norme constante égale à 1 et peut être considéré appartenant à une base orthonormée directe.

On note

$$\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0} = a_{xx}\vec{x}_1 + a_{xy}\vec{y}_1 + a_{xz}\vec{z}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{/R0} = a_{yx}\vec{x}_1 + a_{yy}\vec{y}_1 + a_{yz}\vec{z}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_{/R0} = a_{zx}\vec{x}_1 + a_{zy}\vec{y}_1 + a_{zz}\vec{z}_1$$

$R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est un repère orthonormé direct, ce qui implique :

$$\vec{x}_1.\vec{x}_1 = 1;\ \vec{y}_1.\vec{y}_1 = 1;\ \vec{z}_1.\vec{z}_1 = 1$$
$$\vec{x}_1.\vec{y}_1 = 0;\ \vec{x}_1.\vec{z}_1 = 0;\ \vec{y}_1.\vec{z}_1 = 0$$

par dérivation de ces relations on obtient :

$$\begin{cases} \left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{x}_1 = 0 \\ \left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{y}_1 = 0 \\ \left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{z}_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{y}_1 + \left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{x}_1 = 0 \\ \left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{z}_1 + \left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{x}_1 = 0 \\ \left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{z}_1 + \left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_{/R0}.\vec{y}_1 = 0 \end{cases}$$

en utilisant les composantes des dérivées des vecteurs dans la base de projection associée à $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ces relations deviennent :

$$\begin{cases} a_{xx} = 0 \\ a_{yy} = 0 \\ a_{zz} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{xy} + a_{yx} = 0 \\ a_{xz} + a_{zx} = 0 \\ a_{yz} + a_{zy} = 0 \end{cases}$$

on peut alors exprimer les dérivée vectorielles à partir des 3 paramètres a_{xy}, a_{xz} et a_{yz} :

$$\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0} = a_{xy}\vec{y}_1 + a_{xz}\vec{z}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{/R0} = -a_{xy}\vec{x}_1 + a_{yz}\vec{z}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_{/R0} = -a_{xz}\vec{x}_1 - a_{yz}\vec{y}_1$$

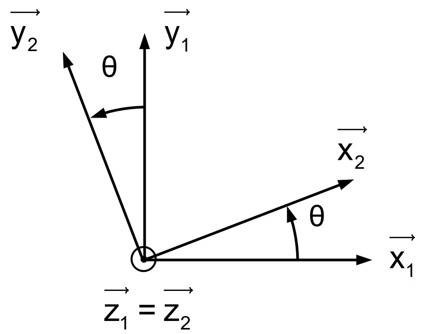
On peut exprimer ce résultat à l'aide des produits vectoriels suivants :

$$\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0} = \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{x}_1 \qquad \text{avec} \qquad \vec{\Omega}_{R1/R0} = -a_{yz}\vec{x}_1 + a_{xz}\vec{y}_1 + a_{xy}\vec{z}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{/R0} = \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{y}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_{/R0} = \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{z}_1$$

2.3. Cas particulier de la rotation plane :



Alors

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{R2/R1} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_1}}$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{x_2} = \cos\theta\overrightarrow{x_1} + \sin\theta\overrightarrow{y_1} \Rightarrow \left(\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_{R1} = -\dot{\theta}\sin\theta\overrightarrow{x_1} + \dot{\theta}\cos\theta\overrightarrow{y_1} = \dot{\theta}\ \cos\theta\overrightarrow{y_1} - \sin\theta\overrightarrow{x_1}$$

$$\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_{R1} = \dot{\theta}\overrightarrow{y_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{x_2}}$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right)_{R1} = \frac{d}{dt}\ \cos\theta\overrightarrow{y_1} - \sin\theta\overrightarrow{x_1} = -\dot{\theta}\sin\theta\overrightarrow{y_1} - \dot{\theta}\cos\theta\overrightarrow{x_1} = -\dot{\theta}\ \sin\theta\overrightarrow{y_1} + \cos\theta\overrightarrow{x_1}\ \boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right)_{R1} = -\dot{\theta}\overrightarrow{x_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{y_2}}$$

et $\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right)_{R1} = \vec{0}}$ car $\overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_1} \quad \Rightarrow \overrightarrow{\Omega}_{R2/R1} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_2}$

2.4. dérivée d'un vecteur quelconque

Soit $R_1(O_1,\ \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en mouvement par rapport à $R_0(O_0,\ \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{/R0} = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{/R1} + \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{U}}$$

démonstration
On note
$\vec{U} = a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 + c\vec{z}_1$

On a alors :

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{/R0} = \dot{a}\vec{x}_1 + a\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{/R0} + \dot{b}\vec{y}_1 + b\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{/R0} + \dot{c}\vec{z}_1 + c\left.\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right|_{/R0}$$

d'après le premier théorème :

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{/R0} = \dot{a}\vec{x}_1 + \dot{b}\vec{y}_1 + \dot{c}\vec{z}_1 + a\,\vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{x}_1 + b\,\vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{y}_1 + c\,\vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{z}_1$$

soit $$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{/R0} = \dot{a}\vec{x}_1 + \dot{b}\vec{y}_1 + \dot{c}\vec{z}_1 + \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \left(a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 + c\vec{z}_1\right)$$

d'où $$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{/R0} = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{/R1} + \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \vec{U}$$