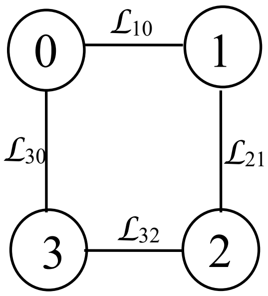
POMPE A PISTONS AXIAUX

1.

*<u>*Liaisons entre solides*</u>



$\mathcal{L}_{10}$: Pivot d'axe $(A, \vec{x}_0)$
$\mathcal{L}_{32}$: Rotule ou sphérique de centre C

$\mathcal{L}_{30}$: Appui plan de normale $\vec{x}_3 = \vec{x}_4$
$\mathcal{L}_{21}$: Pivot glissant d'axe $(B, \vec{x}_0)$

2.

*<u>*Fermeture géométrique*</u>

$$\begin{cases} AB + BC + CD + DE + EA = \vec{0} \\ R\vec{y}_1 - \lambda\vec{x}_0 - h\vec{x}_3 - v\vec{y}_0 - w\vec{z}_3 + d\vec{x}_0 = \vec{0} \end{cases} \qquad (1)$$

*<u>*Résolution*</u>

<u>Projection de (1) sur</u> $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\begin{cases} -\lambda - h\cos\alpha + w\sin\alpha + d = 0 \\ R\cos\theta_{01} - v = 0 \\ R\sin\theta_{01} + h\sin\alpha - w\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

*<u>*Bilan*</u>

paramètres géométriques: λ ; h ; v ; w ; d; α ; θ_{01} N=7
paramètres géométriques donnés : h ; d ; α (constants) ; θ_{01} (variable d'entrée)
paramètres géométriques inconnus : w ; v (variables) ; λ (variable de sortie)

Finalement, il vient (si $\cos\alpha \neq 0$ impossible par construction)

$$\boxed{\begin{gathered} w = \frac{R\sin\theta_{01}}{\cos\alpha} + h\,\mathrm{tg}\alpha \\ v = R\cos\theta_{01} \\ \lambda = d - h\cos\alpha + h\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + R\sin\theta_{01}\mathrm{tg}\alpha \end{gathered}}$$

3. en dérivant il vient :

$$\boxed{\dot{\lambda} = R\dot{\theta}_{01}\cos\theta_{01}\mathrm{tg}\alpha}$$

Le débit associé à un piston est donc

$$\boxed{q = S.R.\dot{\theta}_{01}\cos\theta_{01}\mathrm{tg}\alpha}$$

et

$$\boxed{q_{maxi} = S.R.\dot{\theta}_{01} tg\alpha}$$

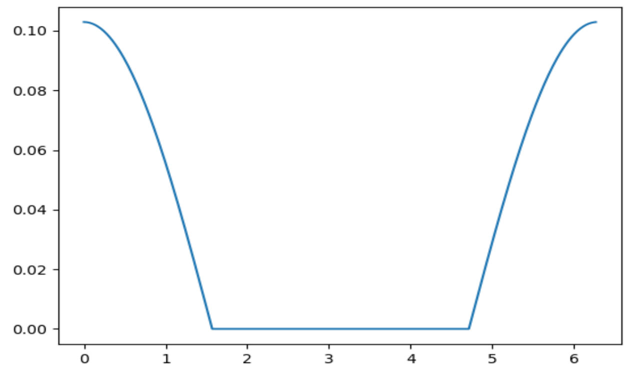
et $\boxed{q_{moy} = 0}$ si on considère les débits positifs et négatifs correspondant respectivement aux phases de refoulement et d'aspiration du fluide.

Ou si on considère juste la phase de refoulement pour les angles allant de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$

$$\boxed{q_{moy} = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(-S.R.\dot{\theta}_{01}\cos\theta_{01} tg\alpha\right)d\theta_{01} = \frac{1}{\pi}S.R.\dot{\theta}_{01}.tg\alpha\left[-\sin\theta_{01}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}S.R.\dot{\theta}_{01}.tg\alpha}$$

AN : $q_{moy} = \frac{2}{\pi}0{,}03.0{,}05.1800.\frac{2\pi}{60}.\tan(20°) = 192.10^{-3}.\tan(20°) = 0{,}07 m^3.s^{-1}$

On peut retrouver cette valeur graphiquement :

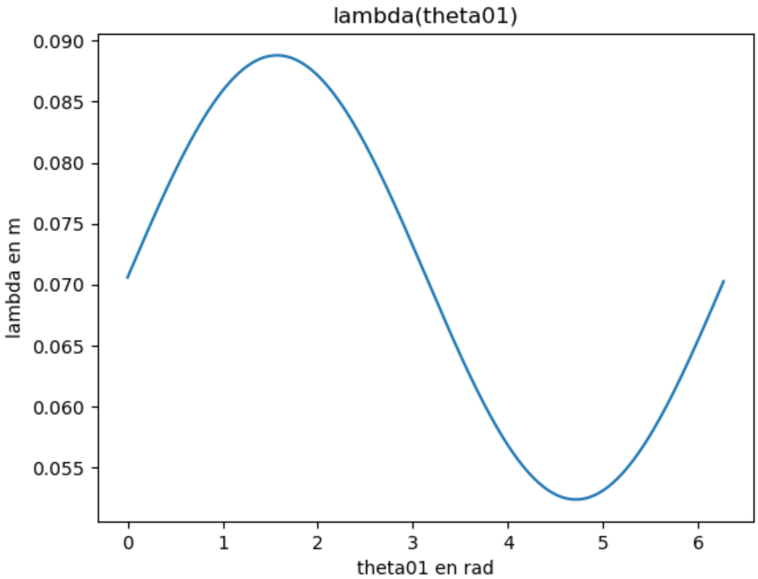


5. On peut additionner les débits de refoulement associés aux 9 pistons

Script python et conclusions associées

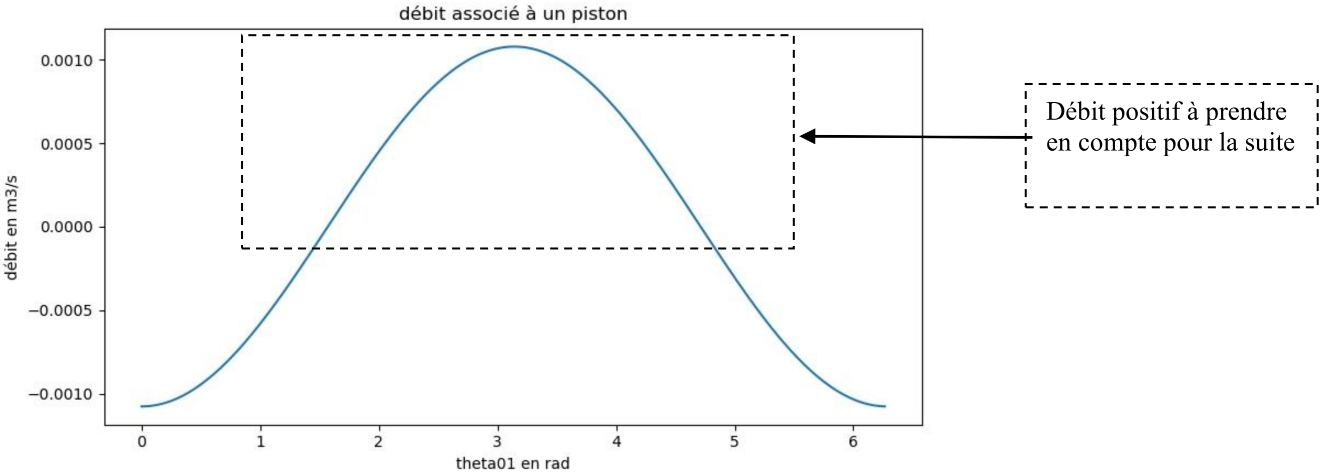
```
##########################################
#  pompe à pistons axiaux
##########################################


import numpy as np

alpha=20/180*np.pi #inclinaison maximale du plan

n=9 #nombre de pistons

r=0.01 #rayon en m du piston

R=0.05 #"rayon" du barrillet

h=0.013 #longueur du patin

d=0.06 #longueur du bati

N=1800 #tr/min de vitesse de rotation maxi du barillet (correspond à thetapoint)
```

```
######################################
# relation entrée sortie


def Lambda(theta01):
        return d+h*np.cos(alpha)+np.tan(alpha)*(R*np.sin(theta01)-h*np.sin(alpha))

T_theta01=[i*2*np.pi/360 for i in range(360)]

T_Lambda=Lambda(T_theta01)

import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
plt.plot(T_theta01,T_Lambda)
plt.title('lambda(theta01)')
plt.xlabel('theta01 en rad')
plt.ylabel('lambda en m')
plt.show()
```




```
######################################

# déterminer la cylindrée associée à un piston

c=(max(T_Lambda)-min(T_Lambda))*np.pi*r**2
print('la cylindrée associée à un piston est de :',c,'m3')

# déterminer la cylindrée de la pompe à 9 pistons

ctotal=9*c

# ces calculs peuvent être fait formellement à la main sans trop de difficulté
# car c=2*R*tan(alpha)*np.pi*r**2
```

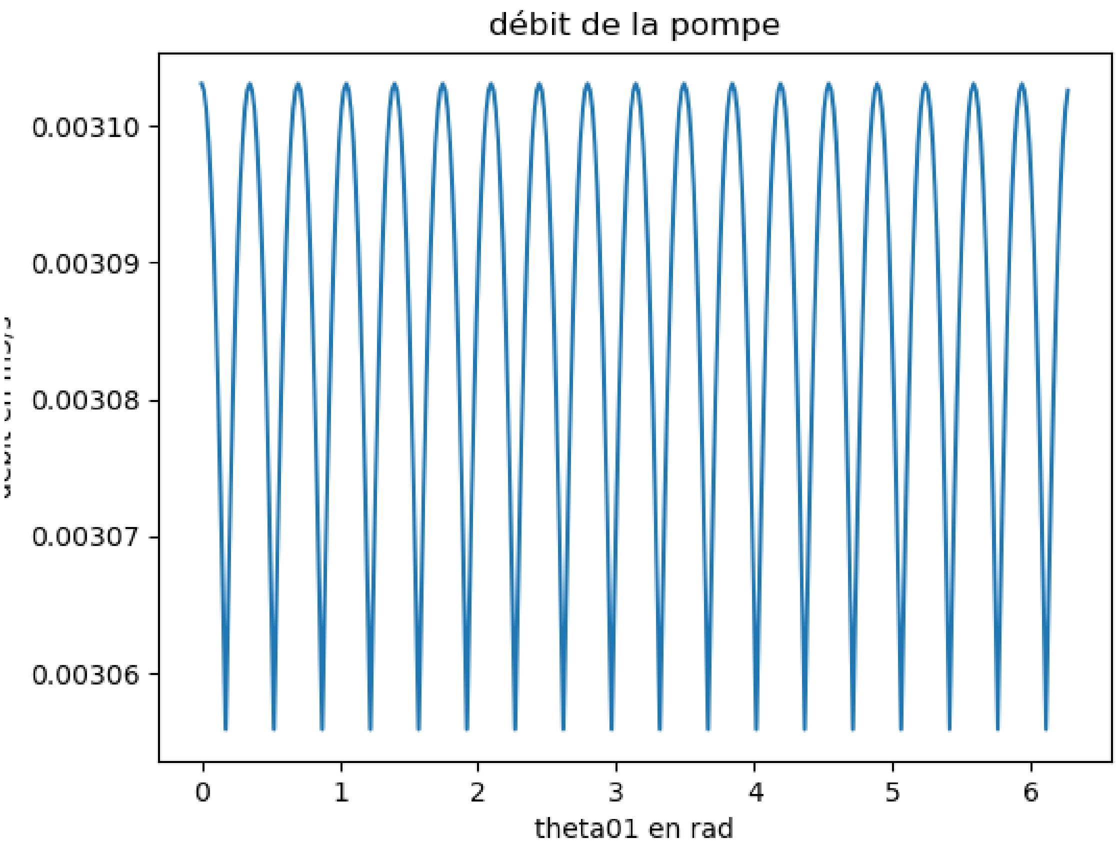
```
########################################

# déterminons le débit instantané associé à un piston pour une position theta01 donnée

omega=N*2*np.pi/60 #passage des tr/min aux rad/s
S=np.pi*r**2 #surface du piston

def Lambdapoint(theta01):
        return -omega*np.tan(alpha)*R*np.cos(theta01)

# les fonctions np.cos et np.sin utilisée sont vectorisées et on peut les utiliser pour obtenir directement un tableau ou une liste de valeurs

T_q=Lambdapoint(T_theta01)*S

plt.clf()
plt.plot(T_theta01,T_q)
plt.title('débit associé à un piston')
plt.xlabel('theta01 en rad')
plt.ylabel('débit en m3/s')
plt.show()
```




```
# déterminer le débit total de la pompe à 9 pistons (attention seules les valeurs de débit positives avec lambdapoint positif sont à prendre en compte pour le refoulement du fluide depuis la pompe)

def q(theta01):
"""débit de refoulement ne considérant que les vitesses Lambapoint positives"""
        if Lambdapoint(theta01)>0:
                return Lambdapoint(theta01)*S
        else:
                return 0

T_q=[q(t) for t in T_theta01]

def qtotal(theta01):
        qt=0
        for n in range(9):
                qt=qt+q(theta01+n*2*np.pi/9)
        return qt
```

```
T_qtotal=[qtotal(theta01) for theta01 in T_theta01]

plt.clf()
plt.plot(T_theta01,T_qtotal)
plt.title('débit de la pompe')
plt.xlabel('theta01 en rad')
plt.ylabel('débit en m3/s')
plt.show()
```

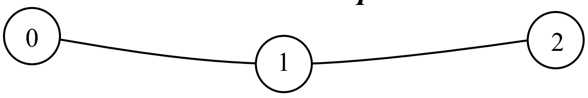
la cylindrée associée à un piston est de : 11,4 cm^3



Le débit de la pompe varie dans le petit intervalle [0,00310m^3/s ;0,00305m^3/s] d'après ce tracé. C'est un débit presque constant et assez élevé.

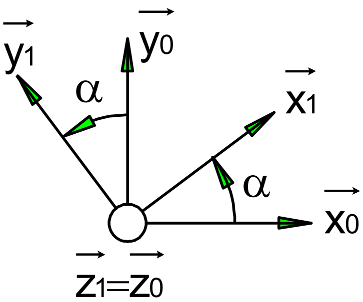
MANEGE A SENSATIONS

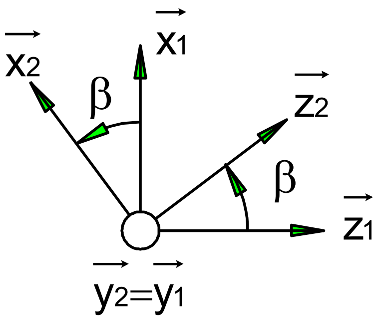
Q1.Réaliser un graphe des liaisons. Préciser le paramètre de mouvement associé à chaque liaison.



Liaison	Nom de la liaison	Paramètre
L_{01}	Pivot d'axe $(O,\vec{z}_1)$	α
L_{12}	Pivot d'axe $(A,\vec{y}_1)$	β

Q2. Réaliser les figures de calcul de changement de base correspondant. En déduire les vecteurs instantanés de rotation sous chaque figure.





$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\alpha}\,\vec{z}_1$ $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\beta}\,\vec{y}_1$

En effectuant le moins de projections possible, déterminer les produits vectoriels suivants :

$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_0$; $\vec{x}_0 \wedge \vec{y}_2$; $\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_0$; $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_0$; $\vec{x}_2 \wedge \vec{y}_0$

$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_0 = -\sin\alpha\vec{z}_0$

$\vec{x}_0 \wedge \vec{y}_2 = \cos\alpha\vec{z}_1$

$\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_0 = \vec{x}_1 \wedge \vec{z}_1 = -\vec{y}_1$

$\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_0 = -\sin\beta\vec{y}_1$

$\vec{x}_2 \wedge \vec{y}_0 = (\cos\beta\vec{x}_1 - \sin\beta\vec{z}_1) \wedge \vec{y}_0 = \cos\beta\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_0 - \sin\beta\vec{z}_1 \wedge \vec{y}_0$

$\vec{x}_2 \wedge \vec{y}_0 = \cos\beta\cos\alpha\vec{z}_1 - \sin\beta\vec{x}_0$

Q3.Déterminer $\vec{V}(G,2/0)$ et vérifier l'homogénéité du résultat.

Par changement de point :

$\vec{V}(G,2/0) = \vec{V}(A,2/0) + \overrightarrow{GA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$

Et par composition des vitesses :

$\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\vec{z}_0$

$\vec{V}(A,2/0) = \vec{V}(A,2/1) + \vec{V}(A,1/0)$

Par changement de point :

$\vec{V}(A,1/0)=\vec{V}(O,1/0)+\overrightarrow{AO}\wedge\vec{\Omega}_{1/0}$

Or du fait des liaisons pivot identifiées en question 1 :

$\vec{V}(O,1/0)=\vec{V}(A,2/1)=\vec{0}$

Ainsi

$\vec{V}(A,1/0)=\overrightarrow{AO}\wedge\vec{\Omega}_{1/0}=-a\vec{x}_1\wedge\dot{\alpha}\vec{z}_1=a\dot{\alpha}\vec{y}_1$

Et

$\vec{V}(G,2/0)=a\dot{\alpha}\vec{y}_1-b\vec{x}_2\wedge\left(\dot{\beta}\vec{y}_1+\dot{\alpha}\vec{z}_0\right)=a\dot{\alpha}\vec{y}_1-b\dot{\beta}\vec{z}_2+b\cos\beta\dot{\alpha}\vec{y}_1$

$\vec{V}(G,2/0)=\left(a+b\cos\beta\right)\dot{\alpha}\vec{y}_1-b\dot{\beta}\vec{z}_2=\left(a+b\cos\beta\right)\dot{\alpha}\vec{y}_2-b\dot{\beta}\vec{z}_2$

Q4. Déterminer la condition sur les paramètres de mouvement et leurs dérivées temporelles qui permet d'assurer en permanence l'exigence 1 du cahier des charges.

Il faut alors vérifier $\left\|\vec{V}(G,2/0)\right\|<V_{\max}$

Soit $\left\|\left(a+b\cos\beta\right)\dot{\alpha}\vec{y}_2-b\dot{\beta}\vec{z}_2\right\|<V_{\max}$

Et donc à tout instant :

$\sqrt{\left(a+b\cos\beta\right)^2\dot{\alpha}_1^2+b^2\dot{\beta}^2}<V_{\max}$

On se place dans le cas où la nacelle 2 est bloquée dans sa position verticale par rapport au bras 1 ($\beta=90°$). De plus, la vitesse de rotation du bras 1 par rapport au socle 0 est constante :
$\dot{\alpha}=\dfrac{d\alpha}{dt}=\text{cte}$.

L'expression force centrifuge, ou accélération centrifuge, est une force apparente qui s'explique par un effet de déportation d'un corps de masse M, en rotation vers l'extérieur de la courbe. C'est ce même effet qui donne la sensation d'éjection latérale à un pilote dans une courbe. Cette force vaut : $F_{centrifuge}=Ma_G$ avec a_G l'accélération subie au point G égale à $a_G=\dot{\alpha}^2r$.

Q5. Déterminer la condition sur la valeur de la vitesse angulaire (en tour par minute) du bras 1 par rapport au sol 0 qui permet d'assurer en permanence l'exigence 2 du cahier des charges.

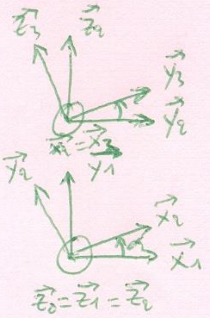
Dans ce cas particulier $\beta=\dfrac{\pi}{2}$ et $\dot{\alpha}=\dfrac{d\alpha}{dt}=\text{cte}$ donc : $\vec{V}(G,2/0)=a\dot{\alpha}\vec{y}_1$

et $\vec{a}(G/0)=\dfrac{d\vec{V}(G/0)}{dt_{/0}}=\dfrac{d\vec{V}(G,2/0)}{dt_{/0}}=-a\dot{\alpha}^2\vec{x}_1$

on doit alors vérifier l'exigence 2 telle que :

$a\dot{\alpha}^2<3g$ soit $\dot{\alpha}<\sqrt{\dfrac{3g}{a}}$ et donc $\dot{\alpha}<3,312rad/s$

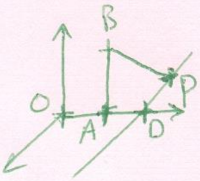
ROBOT DE PEINTURE



3. $\vec{V}(P/0) = \dot{\lambda}\,\vec{y_0} - L\dot{\beta}\,\vec{y_3} + L\sin\beta\,\dot{\alpha}\,\vec{x_2}$

4. P décrit $(D, \vec{x_0}) \Rightarrow \vec{V}(P/0) \parallel \vec{x_0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}(P/0)\cdot\vec{y_0} = 0 \\ \vec{V}(P/0)\cdot\vec{z_0} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda} - L\dot{\beta}\cos\beta\cos\alpha + L\dot{\alpha}\sin\beta\sin\alpha = 0 & (1) \\ -L\dot{\beta}\sin\beta = 0 & (2) \end{cases}$



car $\begin{cases} \vec{y_3}\cdot\vec{y_0} = (\cos\beta\,\vec{y_2} + \sin\beta\,\vec{z_2})\cdot\vec{y_1} = \cos\beta\cos\alpha \\ \vec{x_2}\cdot\vec{y_0} = \vec{x_2}\cdot\vec{y_1} = \sin\alpha \\ \vec{y_3}\cdot\vec{z_0} = \vec{y_3}\cdot\vec{z_2} = \sin\beta \end{cases}$

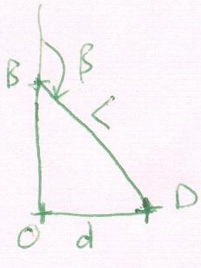
comme $\beta \neq \frac{\pi}{2}\,[\pi]$ et $L \neq 0$ alors (2) $\Rightarrow \dot{\beta} = 0 \Rightarrow \beta = cte$.

d'où (1) $\Rightarrow \dot{\lambda} + L\dot{\alpha}\sin\beta\sin\alpha = 0$

$\Rightarrow \boxed{\dot{\lambda} = -L\dot{\alpha}\sin\beta\sin\alpha}$

5. en intégrant cette équation on obtient :

$\lambda = L\ \sin\beta\cos\alpha + cte \quad (3)$



or lorsque P passe en D, P se trouve dans le plan vertical $(O, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ donc $\alpha = 0$

soit $\alpha = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ donc (3) $\Rightarrow 0 = L\sin\beta + cte$
$\Rightarrow cte = -L\sin\beta = -d$
et d'après le schéma.

$\Rightarrow \boxed{\dot{\lambda} = -d\,\dot{\alpha}\sin\alpha}$

6. $\|\vec{V}(P/0)\| = V$ $\quad d\,\dot{\alpha}\sin\alpha| = V$
$\Rightarrow \vec{V}(P/0)\cdot\vec{x_0} = V \Rightarrow L\sin\beta\,\dot{\alpha}\,\vec{x_2}\cdot\vec{x_0} = V \Rightarrow L\sin\beta\,\dot{\alpha}\cos\alpha = V$

$\Rightarrow \boxed{\dot{\alpha} = \frac{V}{d\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \dot{\lambda} = -V\tan\alpha}$