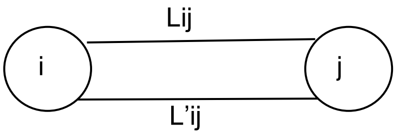
NACELLE de MANEGE

Question 1:



$$\{Vj/i\} = \begin{Bmatrix} p_{ji} & 0 \\ q_{ji} & 0 \\ r_{ji} & 0 \end{Bmatrix}_O \quad \text{et} \quad \{V'j/i\} = \begin{Bmatrix} p'_{ji} & 0 \\ q'_{ji} & 0 \\ r'_{ji} & w'_{ji} \end{Bmatrix}_A$$

Par composition des vitesses et antisymétrie (compatibilité cinématique) :

$$\{Vj/i\} = \{V'j/i\}$$

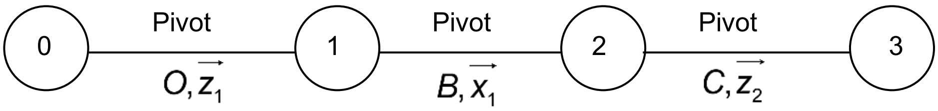
On écrit les 2 torseurs en A avec pour la liaison Lij :

$$\vec{V}(A, j/i) = \vec{V}(O, j/i) + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{j/i}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} p_{ji} \\ q_{ji} \\ r_{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda.q_{ji} \\ \lambda.p_{ji} \\ 0 \end{pmatrix}$$

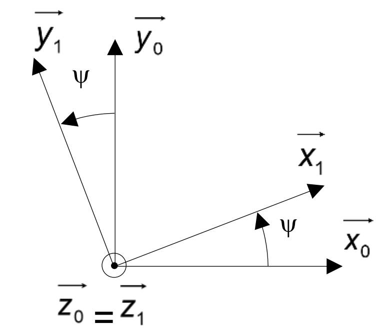
$$\begin{cases} p_{ji} = p'_{ji} \\ q_{ji} = q'_{ji} \\ r_{ji} = r'_{ji} \\ -\lambda.q_{ji} = 0 \\ \lambda.p_{ji} = 0 \\ 0 = w'_{ji} \end{cases}$$ on en déduit le torseur cinématique de la liaison équivalente : $\{Veq\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{ji} & 0 \end{Bmatrix}_A$

Liaison équivalente : pivot d'axe (O,z)

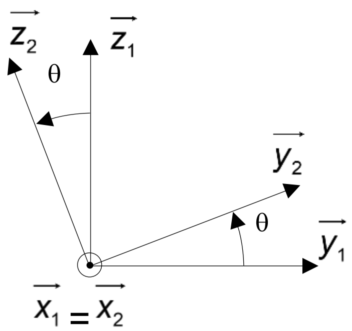
Question 2: Tracer le graphe de liaisons associé à la chaîne ouverte.



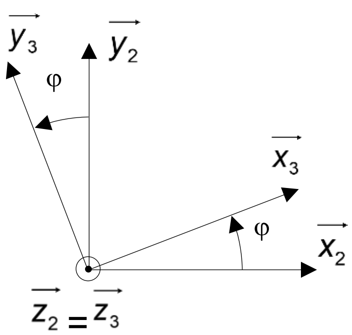
Question 3: Tracer les figures planes associées aux angles ψ, θ et φ. Déterminer les vecteurs vitesse de rotation correspondants.



$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\psi}\overrightarrow{z_1}$



$\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta}\overrightarrow{x_1}$



$\vec{\Omega}_{3/2} = \dot{\varphi}\vec{z}_2$

Question 4: Exprimer les torseurs cinématiques associés à chaque liaison en précisant point de réduction et base(s) de projection(s).

$$\{V_{1/0}\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \dot{\psi}\overrightarrow{z_1} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\psi} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{A \\ dans B0 ou B1}}$$

$$\{V_{3/2}\} = {}_{C}\begin{Bmatrix} \dot{\varphi}\overrightarrow{z_2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{C \\ dans B2 ou B3}}$$

$$\{V_{2/1}\} = {}_{B}\begin{Bmatrix} \dot{\theta}\overrightarrow{x_1} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{B \\ dans B1 ou B2}}$$

Question 5: Déterminer par changement de point et composition des vitesses si nécessaire les vecteurs vitesses $\vec{V}(A,1/0)$, $\vec{V}(B,2/0)$, $\vec{V}(C,3/2)$.

$\boxed{\vec{V}(A,1/0) = \vec{0}}$ car A point de l'axe de la pivot 1/0

$\vec{V}(B,2/0) = \vec{V}(B,2/1) + \vec{V}(B,1/0) = \vec{V}(B,1/0)$ car B point de l'axe de la pivot 2/1

$$\boxed{\vec{V}(B,2/0) = \vec{V}(A,1/0) + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} + \dot{\psi}\overrightarrow{z_1} \wedge a\overrightarrow{y_1} = -a\dot{\psi}\overrightarrow{x_1}}$$

$\boxed{\vec{V}(C,3/2) = \vec{0}}$ car C point de l'axe de la pivot 3/2

Question 6: Déterminer les vecteurs vitesses $\vec{V}(C,3/0)$ et $\vec{V}(D,3/0)$.

$$\vec{V}(C,3/0) = \vec{V}(C,3/2) + \vec{V}(C,2/0) = \vec{V}(B,2/0) + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} = -a\dot{\psi}\overrightarrow{x_1} + b\vec{z}_2 \wedge \left(\dot{\theta}\overrightarrow{x_1} + \dot{\psi}\overrightarrow{z_1}\right)$$

$$\vec{V}(C,3/0) = -a\dot{\psi}\overrightarrow{x_1} + b\left(\dot{\theta}\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_1 + \dot{\psi}\vec{z}_2 \wedge \overrightarrow{z_1}\right)$$

$$\boxed{\vec{V}(C,3/0) = -a\dot{\psi}\overrightarrow{x_1} + b\left(\dot{\theta}\vec{y}_2 - \dot{\psi}\sin(\theta)\vec{x}_2\right)}$$

$$\vec{V}(D,3/0) = \vec{V}(C,3/0) + \overrightarrow{DC} \wedge \vec{\Omega}_{3/0}$$

$$\vec{V}(D,3/0) = -a\dot{\psi}\overrightarrow{x_1} + b\left(\dot{\theta}\vec{y}_2 - \dot{\psi}\sin(\theta)\vec{x}_2\right) - c\vec{x}_3 \wedge \left(\dot{\theta}\overrightarrow{x_1} + \dot{\psi}\overrightarrow{z_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{z_2}\right)$$

Or d'après les figures de calcul

$\vec{x}_3 \wedge \overrightarrow{x_1} = -\sin \quad \vec{z}_2$

$\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_1 = \left(\cos\varphi\vec{x}_2 + \sin\varphi\vec{y}_2\right) \wedge \vec{z}_1 = -\cos\varphi\vec{y}_1 + \sin\varphi\cos\theta\vec{x}_2$

$\vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2 = -\vec{y}_3$

D'où :

$$\boxed{\vec{V}(D,3/0) = -a\dot{\psi}\overrightarrow{x_1} + b\left(\dot{\theta}\vec{y}_2 - \dot{\psi}\sin(\theta)\vec{x}_2\right) - c\left(-\sin\varphi\dot{\theta}\overrightarrow{z_2} - \cos\varphi\dot{\psi}\overrightarrow{y_1} + \dot{\psi}\sin\varphi\cos\theta\vec{x}_2 - \dot{\varphi}\vec{y}_3\right)}$$

Ou

$$\boxed{\vec{V}(D,3/0) = -\left(a + b\sin(\theta) + c\sin(\varphi)\cos(\theta)\right)\dot{\psi}\overrightarrow{x_1} + \left(b + c\sin(\theta)\right)\dot{\theta}\vec{y}_2 + c\dot{\varphi}\vec{y}_3}$$

Question 7: Déterminer par dérivation l'accélération du point D par rapport à 0 dans le cas particulier $\theta = 0$, $\psi = 0$ et dans lequel seul 3 est en mouvement par rapport à 2 (2 immobile par rapport à 0).

On a alors $\vec{V}(D,3/0) = c\ \vec{y}_3$

Et par définition : $\vec{a}(D/0) = \dfrac{d\vec{V}(D/0)}{dt/0}$

Et $\vec{a}(D/0) = \dfrac{d\vec{V}(D,3/0)}{dt/0}$ Car D fixe/3

Or par dérivation vectorielle : $\dfrac{d\vec{y}_3}{dt/0} = \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{y}_3 = \dot{\varphi} z_3 \wedge \vec{y}_3 = -\dot{\varphi}\vec{x}_3$

D'où : $\boxed{\vec{a}(D/0) = c\left(\ddot{\varphi}\vec{y}_3 - \dot{\varphi}^2\vec{x}_3\right)}$

Question 8: Déterminer la valeur maximale de cette accélération en prenant c=1,5m et les vitesses et accélérations angulaires maximales générées par le moteur hydraulique de la liaison entre 2 et 3 égales respectivement à 1rad/s et 1rad/s².

L'application numérique pour la norme de cette accélération donne alors :

$$\boxed{\left\|\vec{a}(D/0)\right\| = c\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \left(\dot{\varphi}^2\right)^2} = 1{,}5\sqrt{2} = 2{,}121\,m/s^2}$$

Question 9: Conclure par rapport à la valeur d'accélération conseillée inférieure à $3g \approx 30m/s^2$

L'accélération avec ce seul mouvement de rotation respecte la valeur conseillée. Il est très probable que la mise en mouvement simultanée de 2 ou 3 de rotations génère des accélérations supérieures à la valeur conseillée par contre.

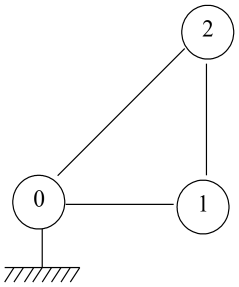
Question 10: Avec $\vec{V}(D,3/0) = -\left(a + c\sin(\varphi)\right)\dot{\psi}\vec{x}_1 + c\dot{\varphi}\vec{y}_3$

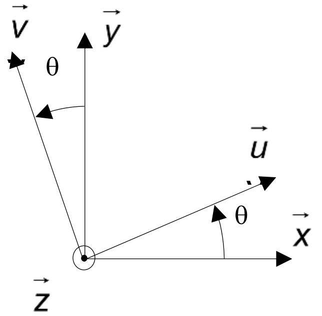
Par dérivation vectorielle : $\dfrac{d\vec{y}_3}{dt/0} = \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{y}_3 = \left(\dot{\psi}\vec{z}_1 + \dot{\varphi}\vec{z}_3\right) \wedge \vec{y}_3 = \dot{\psi}\left(-\cos\theta\vec{x}_3 + \sin\theta\sin\varphi\vec{z}_3\right) - \dot{\varphi}\vec{x}_3$

D'où : $\boxed{\vec{a}(D/0) = -\left(a + c\sin\phi\right)\ddot{\psi}\vec{x}_1 + c\cos\varphi\dot{\varphi}\dot{\psi}\vec{y}_1 + c\ddot{\varphi}\vec{y}_3 - \left(a + c\sin\varphi\right)\dot{\psi}^2\vec{y}_1 + c\cos\varphi\dot{\psi}^2\vec{x}_1 + c\dot{\varphi}^2\vec{x}_3 + c\dot{\varphi}\dot{\psi}\vec{x}_0}$

SCIE ALTERNATIVE PORTATIVE

Question 1 : Réaliser le graphe de liaison du mécanisme schématisé figure 2. Faire la figure plane de calcul.





Question 2 : Ecrire la fermeture géométrique OBD et en déduire la relation entrée-sortie entre d, θ ainsi que les paramètres géométriques constants nécessaires (voir schéma cinématique).

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$$

Projetée sur la direction x cette relation vectorielle donne :

$$e.\cos\theta+g-d=0$$

Relation dans laquelle g et e sont des constantes.

Question 3 : Donner le nombre de degré de liberté et la forme des torseurs cinématiques correspondant à chacune des liaisons L_{01} et L_{02}.

1 degré de liberté de rotation pour L_{01}

$$\{V1/0\}=\left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}_{10}=r_{10}\vec{z}\\ \vec{V}(O,1/0)=\vec{0}\end{array}\right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=\left\{\begin{array}{c|c}0&0\\0&0\\r_{10}&0\end{array}\right\}_{O,A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

1 degré de liberté de translation pour L_{02}

$$\{V2/0\}=\left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}_{20}=\vec{0}\\ \vec{V}(M,2/0)=u_{20}\vec{x}\end{array}\right\}_{\forall M}=\left\{\begin{array}{cc}0&u_{20}\\0&0\\0&0\end{array}\right\}_{\forall M \text{ dans } (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

pas besoin de changement de point pour ce torseur !!

Question 4 : Ecrire la fermeture cinématique à l'aide des torseurs, en déduire les 2 relations vectorielles cinématiques.

$\{V1/0\}+\{V0/2\}+\{V2/1\}=\{0\}$ par composition des vitesses

$\{V1/0\}-\{V2/0\}+\{V2/1\}=\{0\}$ par antisymétrie

D'où les relations vectorielles valables quel que soit M :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}\vec{\Omega}_{10}&-&\vec{\Omega}_{20}&+&\vec{\Omega}_{21}&=&\vec{0}\\ \vec{V}(M,1/0)&-&\vec{V}(M,2/0)&+&\vec{V}(M,2/1)&=&\vec{0}\end{array}\right.$$

Question 5 : En déduire un système de 6 équations scalaires à 7 inconnues.

On peut prendre O, A ou B comme point de réduction.
Mon choix se porte sur B pour minimiser le calcul de changement de point :

$$\begin{cases} 0 & - & 0 & + & p_{21} & = & 0 \\ 0 & - & 0 & + & q_{21} & = & 0 \\ r_{10} & - & 0 & + & r_{21} & = & 0 \\ -e\sin\theta r_{10} & - & u_{20} & + & 0 & = & 0 \\ e\cos\theta r_{10} & - & 0 & + & v_{21} & = & 0 \\ 0 & - & 0 & + & w_{21} & = & 0 \end{cases}$$

Il n'y a finalement que 2 expressions scalaires manquante dans le système d'équation qui correspondent aux projections sur x et y de :

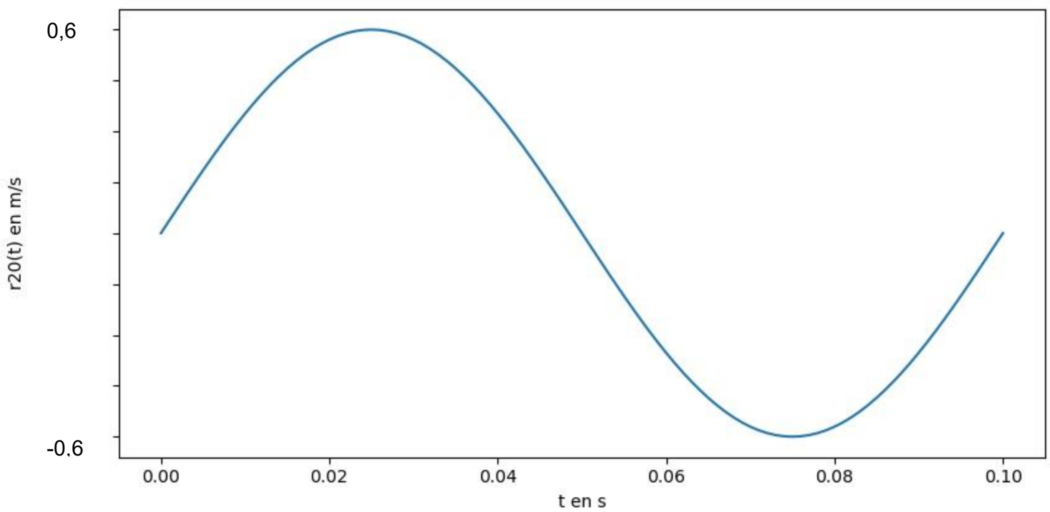
$$\vec{V}(B,1/0) = \vec{V}(O,1/0) + \overrightarrow{BO} \wedge \vec{\Omega}_{10} = \vec{0} + \left(-e\vec{u}\right) \wedge r_{10}\vec{z} = er_{10}\vec{v} = er_{10}\left(\cos\theta\vec{y} - \sin\theta\vec{x}\right)$$

Question 6 : En déduire la relation entrée-sortie du mécanisme reliant u_{20} à r_{10} et les paramètres géométriques nécessaires. Et représenter la courbe de la loi horaire périodique $u_{20}(t)$ pour r_{10}=600tr/min et e=10mm en précisant bien les noms des axes d'abscisse et d'ordonnée ainsi que les valeurs numériques remarquables. (on remarquera que $r_{10} = \dot{\theta}$ et donc $\theta = r_{10}.t$)

On obtient alors la relation entrée sortie :

$$\boxed{u_{20} = -e\sin\theta r_{10}}$$

Ce qui correspond bien à la dérivée de la relation entrée sortie géométrique de la question 2



Étude d'une pompe hydraulique à pistons radiaux

Question 1 : Donner le nom normalisé et les caractéristiques de chacune des liaisons entre les pièces 0, 3, 5 et 6 apparaissant sur le document 3.

L_{03} : pivot d'axe $(O_0, \vec{x}_0)$

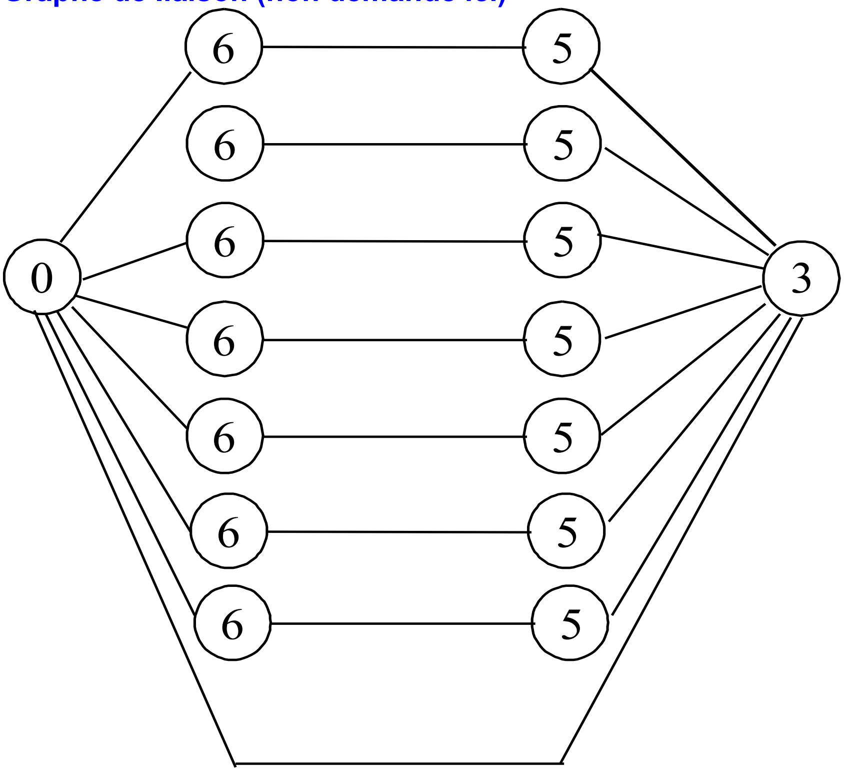
L_{35} : pivot glissant d'axe $(O_0, \vec{y})$

L_{56} : rotule de centre A

L_{60} : pivot d'axe $(O_6, \vec{x}_0)$

Question 2 : Donner la forme des torseurs cinématiques associés

Graphe de liaison (non demandé ici)



$$\{V\ 3/5\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ q_{35} & v_{35} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{\text{dans } (\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \\ \text{en A ou } O_0}}$$

$$\{V\ 5/6\} = \begin{Bmatrix} p_{56} & 0 \\ q_{56} & 0 \\ r_{56} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{\text{dans toute base} \\ \text{en A}}}$$

$$\{V\ 6/0\} = \begin{Bmatrix} p_{60} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{\text{dans toute base} \\ \text{en } O_6}}$$

$$\{V\ 3/0\} = \begin{Bmatrix} p_{30} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{\text{dans toute base} \\ \text{en } O_0}}$$

Question 3 : Déterminer la liaison équivalente entre le barillet 3 et le patin 6 et proposer un schéma cinématique de la chaîne de solide 0-3-6 utilisant cette liaison équivalente.

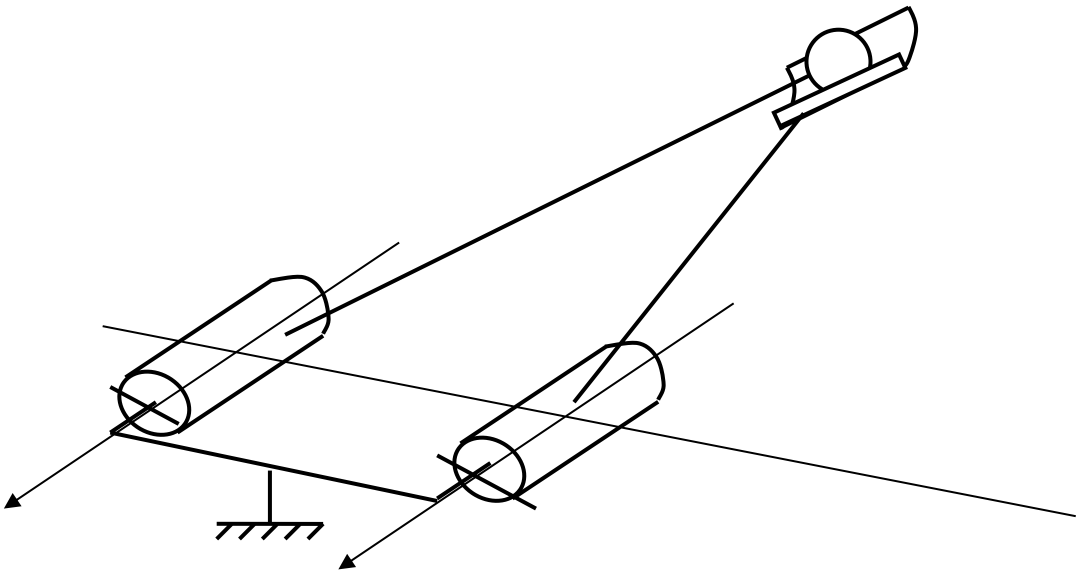
$$\{V\,3/6\}_A = \{V\,3/5\}_A + \{V\,5/6\}_A$$

$$\{V\,3/6\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ q_{35} & v_{35} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} p_{56} & 0 \\ q_{56} & 0 \\ r_{56} & 0 \end{Bmatrix}_A \text{ dans } (\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$

$$\{V\,3/6\}_A = \begin{Bmatrix} p_{56} & 0 \\ q_{35}+q_{56} & v_{35} \\ r_{56} & 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} p_{36} & 0 \\ q_{36} & v_{36} \\ r_{36} & 0 \end{Bmatrix}_A \text{ dans } (\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$

D'où la liaison équivalente :

L_{36} : linéaire annulaire en A d'axe $(A,\vec{y})$



Question 4 : Ecrire la fermeture cinématique en A projetée sur la base 0. En déduire la relation entrée sortie cinématique de la pompe.

$$\begin{array}{ccccccc}
\{V\,3/6\}_A & + & \{V\,6/0\}_A & - & \{V\,3/0\}_A & = \{0\} \\
p_{63} & + & p_{60} & - & p_{30} & = 0 \\
q_{63}\cos\theta - r_{63}\sin\theta & + & 0 & - & 0 & = 0 \\
q_{63}\sin\theta + r_{63}\cos\theta & + & 0 & - & 0 & = 0 \\
0 & + & 0 & - & 0 & = 0 \\
v_{63}\cos\theta & - & r.p_{60}\sin\alpha & + & r.p_{30}\sin\theta & = 0 \\
v_{63}\sin\theta & + & r.p_{60}\cos\alpha & - & r.p_{30}\cos\theta & = 0
\end{array}$$

Car $\vec{V}(A,6/0) = \vec{V}(O_6,6/0) + \overrightarrow{AO_6} \wedge \overrightarrow{\Omega_{6/0}} = \vec{0} - r.\vec{y}_6 \wedge p_{60}.\vec{x} = r.p_{60}\vec{z}_6$ **avec** $\vec{z}_6 = \cos\alpha\vec{z}_0 - \sin\alpha\vec{y}_0$

et $\vec{V}(A,3/0) = \vec{V}(O_0,3/0) + \overrightarrow{AO_0} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \vec{0} - l.\vec{y} \wedge p_{30}.\vec{x}_0 = l.p_{30}\vec{z}$ **avec** $\vec{z} = \cos\theta\vec{z}_0 - \sin\theta\vec{y}_0$

et $\vec{V}(A,6/3) = v_{63}.\vec{y} = v_{63}.(\cos\theta\vec{y}_0 + \sin\theta\vec{z}_0)$

on en déduit la relation entrée-sortie cinématique entre le paramètre cinématique d'entrée p_{30} (rotation moteur) et de sortie v_{63} (translation piston) par combinaison linéaire des 2 dernières équations :

$$v_{63}.(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)+\dot{l}.p_{30}.(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)=0$$

D'où : $v_{63}=-\dot{l}.p_{30}.\tan(\theta-\alpha)$

Question 5 : Ecrire la fermeture géométrique de la chaîne de solide 0-3-5-6-0 et en déduire la relation entrée-sortie géométrique $l=e\cos\theta+\sqrt{r^2-e^2\sin^2\theta}$. En déduire la course totale d'un piston 5 ainsi que la cylindrée de la pompe pour une excentricité e de 10mm et un diamètre de pistons de 24mm. ***On appelle cylindrée de la pompe le volume d'huile refoulé par tour du barillet***

$$\overrightarrow{O_0O_6}+\overrightarrow{O_6A}+\overrightarrow{AO_0}=\vec{0}$$

$$e\vec{y}_0+r\vec{y}_6-l\vec{y}=\vec{0}$$

$$\begin{cases} e & +r\cos\alpha & -l\cos\theta & =0 \\ 0 & +r\sin\alpha & -l\sin\theta & =0 \end{cases}$$

d'où $l=\sqrt{(e+r\cos\alpha)^2+r^2\sin^2\alpha}$ **car** **l>0**

et $r^2=(e-l\cos\theta)^2+l^2\sin^2\theta$

$l^2-2e\cos\theta l+e^2-r^2=0$ $\quad\Delta=4e^2\cos^2\theta-4(e^2-r^2)=4(r^2-e^2\sin^2\theta)$

d'où $l=e\cos\theta+\sqrt{r^2-e^2\sin^2\theta}$ **car** **l>0**

course $\text{course}=l(0)-l(\pi)=2e$

cylindrée $C=7\times S\times 2e$

Question 6 :

Le débit instantané de refoulement d'un piston vaut :

$q=S\vec{V}(A,5/3).\vec{y}$ **si** $\vec{V}(A,5/3).\vec{y}>0$

$q=0$ **sinon**

or $\vec{V}(A,5/3)=\vec{V}(A/3)-\vec{V}(A/5)$

$$\vec{V}(A,5/3)=\frac{d\overrightarrow{O_0A}}{dt/3}-\vec{0}=\dot{l}\vec{y}$$

$$q=S\frac{\dot{l}(\theta)-|\dot{l}(\theta)|}{2}$$

$$\dot{l}=-e\dot{\theta}\sin\theta+\frac{e^2\dot{\theta}\sin 2\theta}{2\sqrt{r^2-e^2\sin^2\theta}}$$

D'où pour un piston : $q(t)=S.e.\dot{\theta}\left(-\sin\theta+\dfrac{e.\sin 2\theta}{2\sqrt{r^2-e^2\sin^2\theta}}\right)$

Pour la pompe :

$$q_{total}(t)=S.e.\dot{\theta}\sum_{k=0}^{6}\left(-\sin\left(\theta+k.\frac{2\pi}{7}\right)+\frac{e.\sin 2\left(\theta+k.\frac{2\pi}{7}\right)}{2\sqrt{r^2-e^2\sin^2\left(\theta+k.\frac{2\pi}{7}\right)}}\right)$$