

DM3 corrigé : Vannes de régulation d'un groupe Turbo-Alternateur de centrale nucléaire

PARTIE I

Q1 :

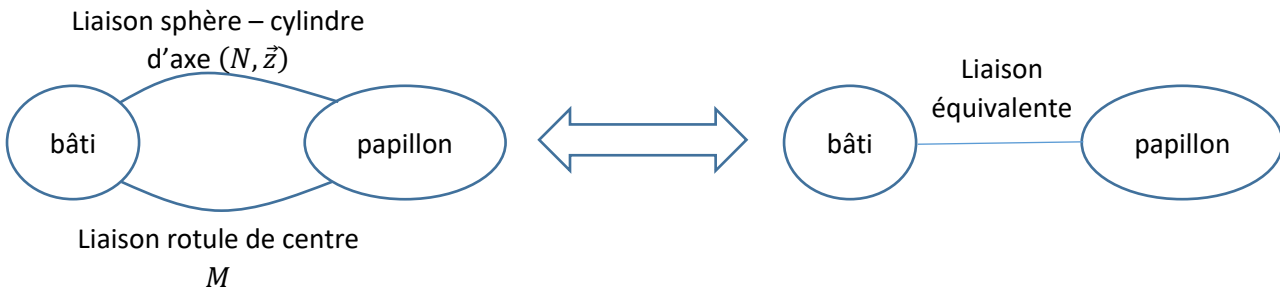
Liaison sphère – cylindre d'axe $(N, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{V}_{papillonSP/bâti}\} = \begin{matrix} N \\ \left(\begin{array}{c} \omega_{xN} \cdot \vec{x} + \omega_{yN} \cdot \vec{y} + \omega_{zN} \cdot \vec{z} \\ V_{zN} \cdot \vec{z} \end{array} \right) \end{matrix} = \begin{matrix} N \\ \left(\begin{array}{cc} \omega_{xN} & 0 \\ \omega_{yN} & 0 \\ \omega_{zN} & V_{zN} \end{array} \right) \end{matrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Liaison rotule de centre M :

$$\{\mathcal{V}_{papillonR/bâti}\} = \begin{matrix} M \\ \left(\begin{array}{c} \omega_{xM} \cdot \vec{x} + \omega_{yM} \cdot \vec{y} + \omega_{zM} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right) \end{matrix} = \begin{matrix} M \\ \left(\begin{array}{cc} \omega_{xM} & 0 \\ \omega_{yM} & 0 \\ \omega_{zM} & 0 \end{array} \right) \end{matrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Q2 :



De façon évidente ces deux liaisons en parallèle sont équivalentes à une liaison pivot d'axe $(N, \vec{z})$ ou $(M, \vec{z})$. Pour le démontrer :

$$\{\mathcal{V}_{papilloneq/bâti}\} = \{\mathcal{V}_{papillonSP/bâti}\} = \{\mathcal{V}_{papillonR/bâti}\}$$

En transportant le torseur cinématique de la liaison rotule du point M au point N :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{papillonR/bâti}^N} &= \overrightarrow{V_{papillonR/bâti}^M} + \overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{\Omega_{papillonR/bâti}} = \vec{0} - n \cdot \vec{z} \wedge (\omega_{xM} \cdot \vec{x} + \omega_{yM} \cdot \vec{y} + \omega_{zM} \cdot \vec{z}) \\ &= -n \cdot \omega_{xM} \cdot \vec{y} + n \cdot \omega_{yM} \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

$$\{\mathcal{V}_{papillonR/bâti}\} = \begin{matrix} M \\ \left(\begin{array}{c} \omega_{xM} \cdot \vec{x} + \omega_{yM} \cdot \vec{y} + \omega_{zM} \cdot \vec{z} \\ n \cdot \omega_{yM} \cdot \vec{x} - n \cdot \omega_{xM} \cdot \vec{y} \end{array} \right) \end{matrix} = \begin{matrix} M \\ \left(\begin{array}{cc} \omega_{xM} & n \cdot \omega_{yM} \\ \omega_{yM} & -n \cdot \omega_{xM} \\ \omega_{zM} & 0 \end{array} \right) \end{matrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

On tire le système d'équations :

$$\begin{cases} \omega_{xeq} = \omega_{xN} = \omega_{xM} \\ \omega_{yeq} = \omega_{yN} = \omega_{yM} \\ \omega_{zeq} = \omega_{zN} = \omega_{zM} \\ V_{xeq} = n \cdot \omega_{yM} = 0 \\ V_{yeq} = -n \cdot \omega_{xM} = 0 \\ V_{zeq} = 0 = V_{zN} \end{cases}$$

On résout rapidement :

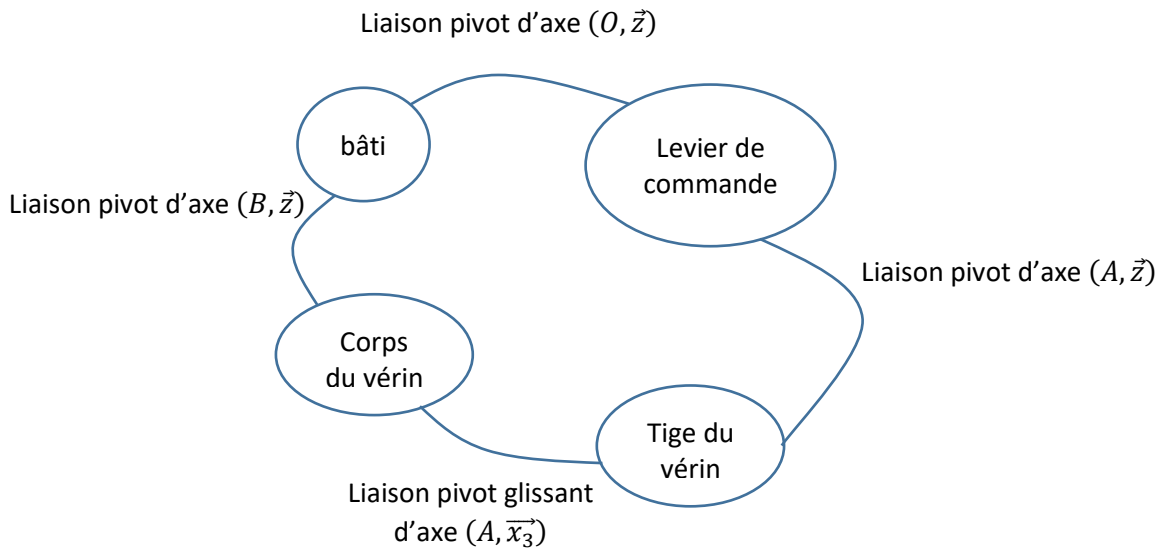
$$\begin{cases} \omega_{xeq} = 0 \\ \omega_{yeq} = 0 \\ \omega_{zeq} = \omega_{zN} = \omega_{zM} \\ V_{xeq} = 0 \\ V_{yeq} = 0 \\ V_{zeq} = 0 \end{cases}$$

Donc le torseur de la liaison équivalente s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{papilloneq/bâti}\}_N = \begin{Bmatrix} \omega_{zeq} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{zeq} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Qui est le torseur d'une liaison pivot d'axe $(N, \vec{z})$ (Si on transporte le torseur de la liaison sphère cylindre en M , on trouve une liaison pivot d'axe $(M, \vec{z})$).

Q3 :



Un seul paramètre géométrique à fixer qui correspond à la translation de la tige dans le corps de vérin. En effet, d'après le schéma fourni, on voit que les angles variables correspondant aux degrés de libertés associés aux 3 liaisons pivots seront uniquement dépendant de la longueur variable du vérin $\lambda(t)$.

Pour déterminer $\omega_{2/3}$, on a :

$$\{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\} = \{\mathcal{V}_{3/0}\} \quad (E)$$

$$\{\mathcal{V}_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{3/2} & V_{A,3/2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})}$$

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{1/0} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} 0 & -e \cdot \omega_{1/0} \\ 0 & 0 \\ \omega_{1/0} & 0 \end{Bmatrix}_A$$

$$\{v_{3/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{3/0} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{3/0} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda(t) \cdot \omega_{3/0} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})}$$

On trouve rapidement en projetant les vitesses de rotation de l'équation (E) sur l'axe $\vec{x}_3$:

$$\omega_{2/3} = 0$$

Q4 :

La fermeture géométrique donne :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$$

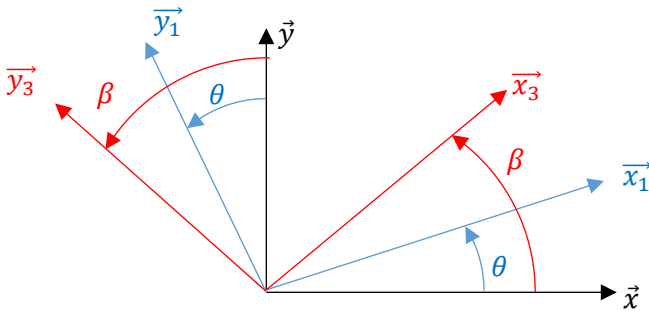
$$e \cdot \vec{y}_1 + \lambda \cdot \vec{x}_3 - L \cdot \vec{x} - d \cdot \vec{y} = \vec{0}$$

$$\lambda \cdot \vec{x}_3 = L \cdot \vec{x} + d \cdot \vec{y} - e \cdot \vec{y}_1$$

$$\lambda^2 = L^2 + d^2 + e^2 - 2 \cdot L \cdot e \cdot \vec{x} \cdot \vec{y}_1 - 2 \cdot d \cdot e \cdot \vec{y} \cdot \vec{y}_1$$

$$\lambda^2 = L^2 + d^2 + e^2 + 2 \cdot L \cdot e \cdot \sin \theta - 2 \cdot d \cdot e \cdot \cos \theta$$

$$\lambda = \sqrt{L^2 + d^2 + e^2 + 2 \cdot L \cdot e \cdot \sin \theta - 2 \cdot d \cdot e \cdot \cos \theta}$$



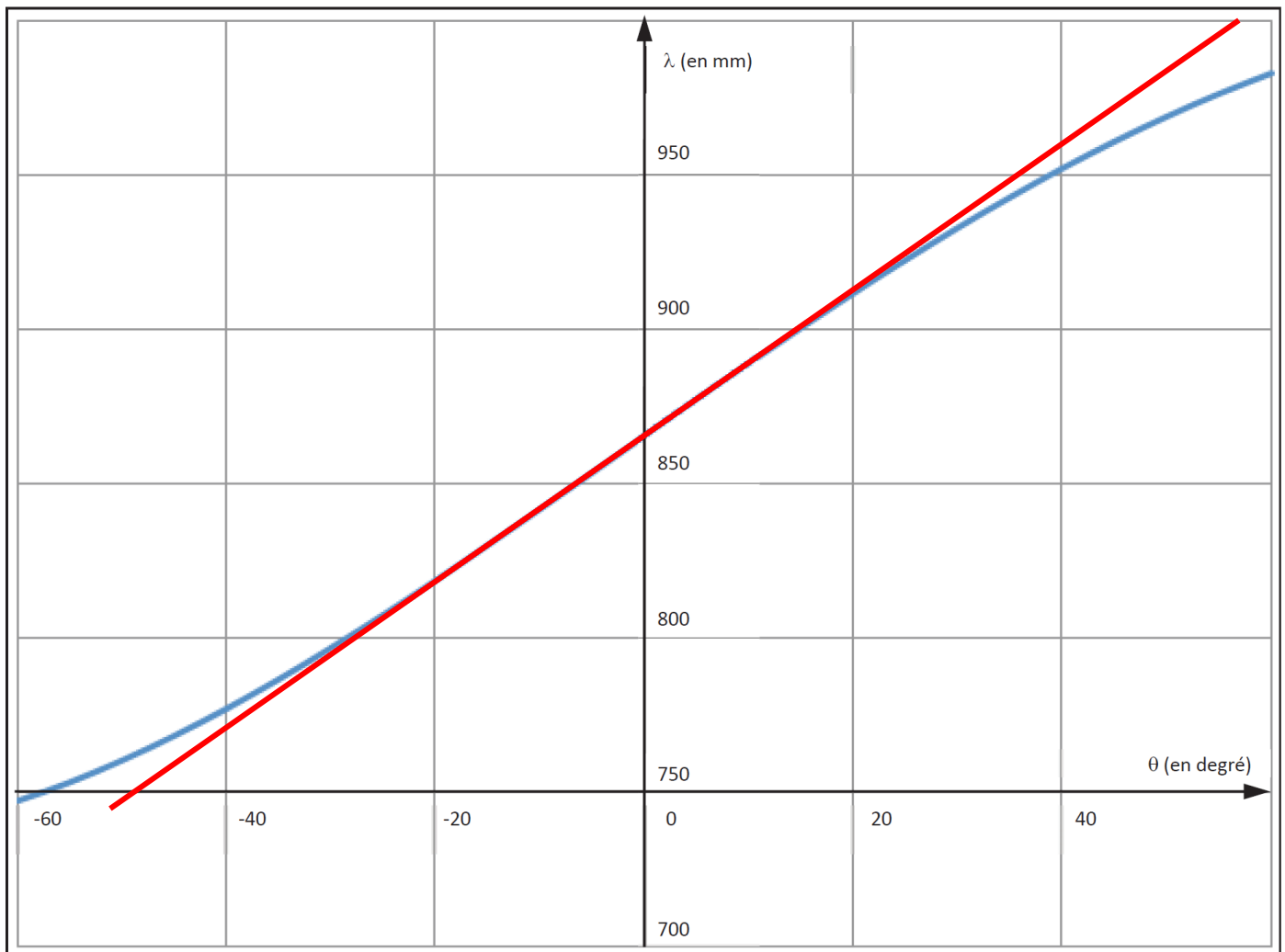
Q5 :

Pour $\theta = +\frac{\pi}{4}$, on trouve : $\lambda = 960,8 \text{ mm}$

Pour $\theta = -\frac{\pi}{4}$, on trouve : $\lambda = 768,8 \text{ mm}$

Donc la course utile : $\Delta\lambda = 192 \text{ mm}$

Q6 :



On trace une droite autour de la position centrée $\theta = 0$ et on détermine son coefficient directeur :

Pour $\theta = 20^\circ = 0,35 \text{ rad}$, on a : $\Delta\lambda = 45 \text{ mm}$

Pour $\theta = -20^\circ = -0,35 \text{ rad}$, on a : $\Delta\lambda = -45 \text{ mm}$

Soit : $\theta = K_\theta \cdot \Delta\lambda$

Donc : $K_\theta = 7,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{mm}^{-1}$

Q7 :

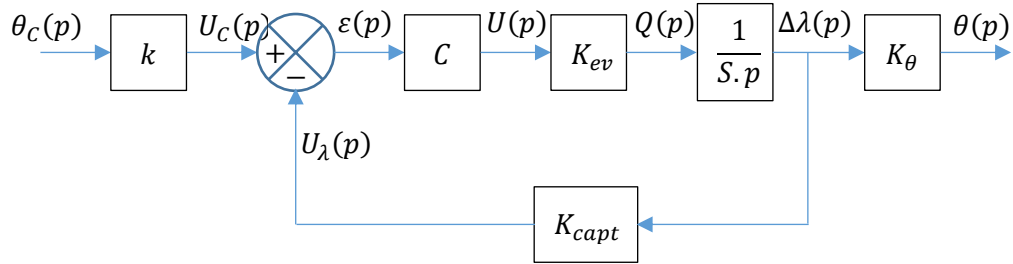
On a : $q(t) = S \cdot \frac{d\Delta\lambda}{dt}$ donc : $Q(p) = S \cdot p \cdot \Delta\lambda(p)$

Q8 :

$$K_{capt} = \frac{u_\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{24}{200}$$

$$K_{capt} = 0,12 \text{ V} \cdot \text{mm}^{-1} = 120 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Q9 :



Q10 :

$$H(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_c(p)} = k \cdot K_\theta \cdot \frac{\frac{C \cdot K_{ev}}{S \cdot p}}{1 + \frac{C \cdot K_{ev} \cdot K_{capt}}{S \cdot p}}$$

$$H(p) = \frac{\frac{k \cdot K_\theta}{K_{capt}}}{1 + \frac{S}{C \cdot K_{ev} \cdot K_{capt}} \cdot p}$$

Q11 :

$H(p)$ est un 1^{er} ordre de la forme :

$$\frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

Avec :

$$K = \frac{k \cdot K_\theta}{K_{capt}}$$

$$\tau = \frac{S}{C \cdot K_{ev} \cdot K_{capt}}$$

Q12 :

On veut : $K = 1$ soit : $k = \frac{K_{capt}}{K_\theta}$

Q13 :

Si on a un gain statique = 1 (en BF) alors l'écart statique sera nul pour une entrée en échelon. On vérifie alors le critère de précision du diagramme des exigences.

Q14 :

On veut un temps à 5% inférieur à 2s. Soit :

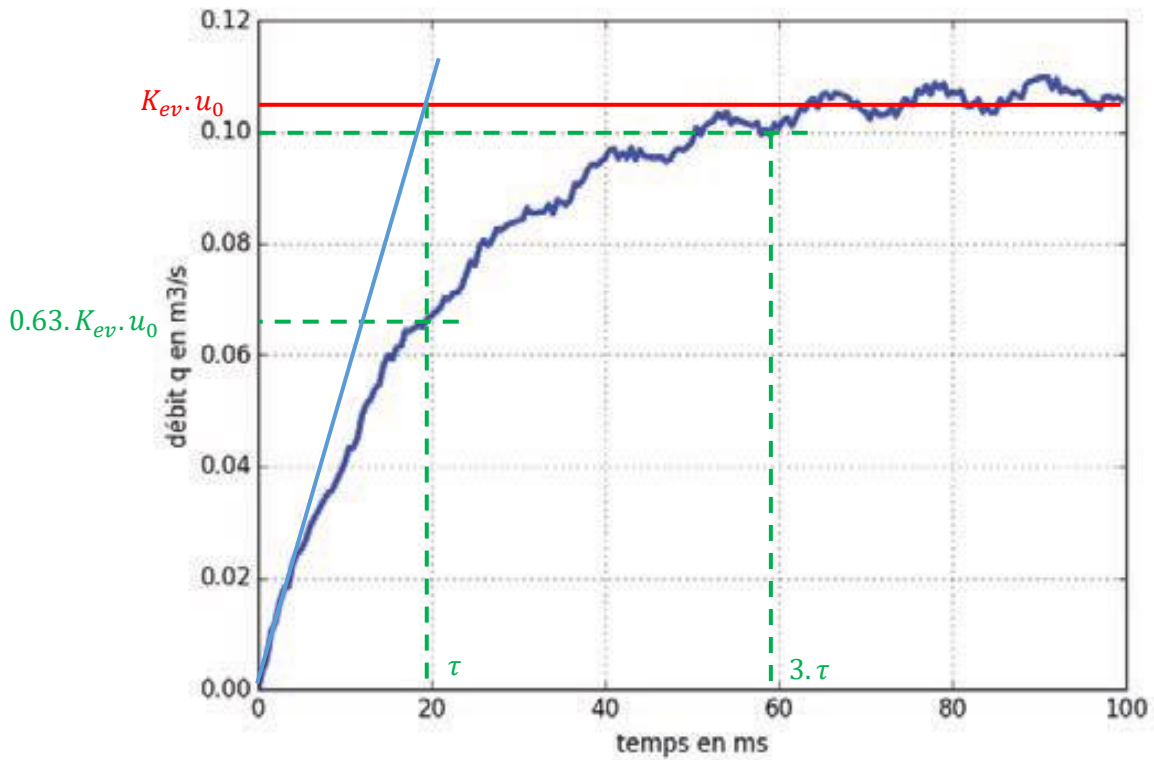
$$t_{5\%} = 3 \cdot \tau < 2 \text{ s}$$

$$\frac{S}{C \cdot K_{ev} \cdot K_{capt}} < \frac{2}{3}$$

$$C > \frac{3.S}{2.K_{ev}.K_{capt}}$$

$$C > 0,0125$$

Q15 :



La tangente à l'origine semble non nulle : on peut donc logiquement penser qu'on a un premier ordre. Soit :

$$H_{ev}(p) = \frac{Q(p)}{U(p)} = \frac{K_{ev}}{1 + \tau_{ev} \cdot p}$$

Par identification graphique, on trouve :

$$K_{ev} \cdot u_0 = 0.105$$

Donc : $K_{ev} = 0,0105 \text{ m}^3 \cdot (\text{s} \cdot \text{V})^{-1}$

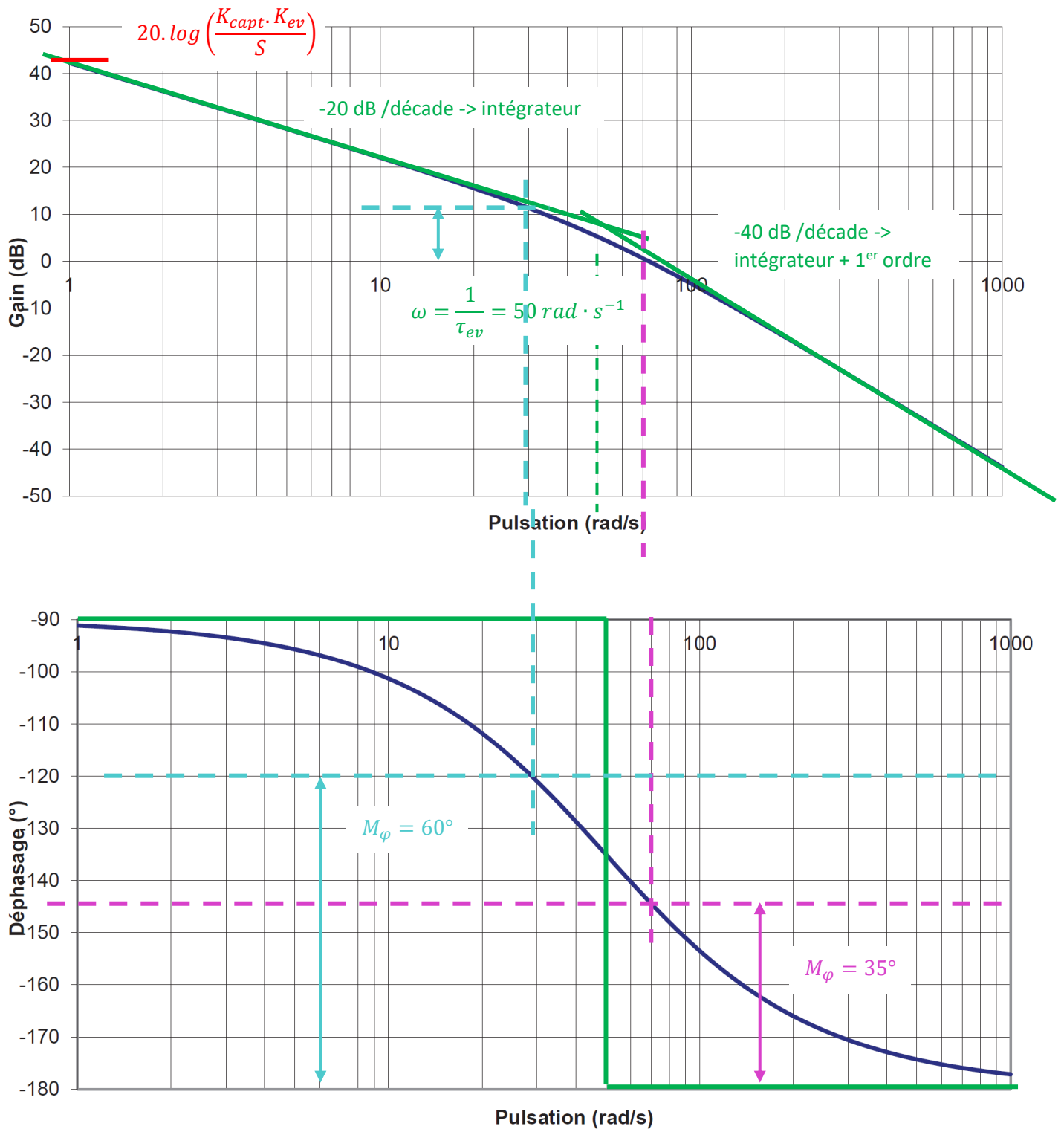
Et : $3 \cdot \tau = 60 \text{ ms}$ $\tau = 20 \text{ ms}$

Q16 :

$$H(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_c(p)} = k \cdot K_\theta \cdot \frac{\frac{C}{S \cdot p} \cdot \frac{K_{ev}}{1 + \tau_{ev} \cdot p}}{1 + \frac{C \cdot K_{capt}}{S \cdot p} \cdot \frac{K_{ev}}{1 + \tau_{ev} \cdot p}}$$

$$H(p) = \frac{\frac{C \cdot K_{capt} \cdot K_{ev}}{S}}{p \cdot (1 + \tau_{ev} \cdot p)} \approx \frac{130}{p \cdot (1 + 0,2 \cdot p)}$$

Diagramme de Bode



Q17 :

La marge de phase $M_\varphi = 35^\circ$ est positive et la marge de gain $M_G = \infty$. Le système est donc stable.

Q18 :

On veut une marge de phase $M_\varphi = 60^\circ$.

Graphiquement, on trouve une pulsation $\omega = 30 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, il faut donc « baisser » le gain d'environ 12 dB. Soit

$$20 \cdot \log \left(\frac{C \cdot K_{capt} \cdot K_{ev}}{S} \right) = 11,5$$

$$\frac{C \cdot K_{capt} \cdot K_{ev}}{S} = 10^{0,575} = 3,76$$

$$C = 0,3$$

Par le calcul, on cherche la pulsation pour laquelle $\text{Arg}(H(p)) = -120^\circ$

$$\text{Arg}(H(j \cdot \omega_\varphi)) = \text{Arg} \left(\frac{C \cdot K_{capt} \cdot K_{ev}}{S \cdot j \cdot \omega_\varphi} \right) - \text{Arg}(1 + \tau_{ev} \cdot j \cdot \omega_\varphi) = -90 - \tan^{-1}(\tau_{ev} \cdot \omega_\varphi) = -120^\circ$$

$$\tan^{-1}(\tau_{ev} \cdot \omega_\varphi) = 30^\circ$$

$$\omega_\varphi = \frac{1}{\tau_{ev} \cdot \sqrt{3}} = 28,9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Puis on cherche le gain à cette pulsation ω_φ :

$$\begin{aligned} 20 \cdot \log |H(j \cdot \omega_\varphi)| &= 20 \cdot \log \left| \frac{C \cdot K_{capt} \cdot K_{ev}}{S \cdot j \cdot \omega_\varphi} \right| + 20 \cdot \log \left| \frac{1}{1 + \tau_{ev} \cdot j \cdot \omega_\varphi} \right| \\ &= 20 \cdot \log \left(\frac{C \cdot K_{capt} \cdot K_{ev}}{S \cdot \omega_\varphi} \right) - 20 \cdot \log \sqrt{1 + \tau_{ev}^2 \cdot \omega_\varphi^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{C \cdot K_{capt} \cdot K_{ev}}{S \cdot \omega_\varphi} = \sqrt{1 + \tau_{ev}^2 \cdot \omega_\varphi^2}$$

$$C = \frac{S \cdot \omega_\varphi}{K_{capt} \cdot K_{ev}} \cdot \sqrt{1 + \tau_{ev}^2 \cdot \omega_\varphi^2}$$

$$C = 0,26$$

Ce gain C permettra de respecter les exigences de stabilité.

Q19 :

$$H(p) = \frac{1}{1 + 3 \cdot 10^{-2} \cdot p + 6 \cdot 10^{-4} \cdot p^2} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2}$$

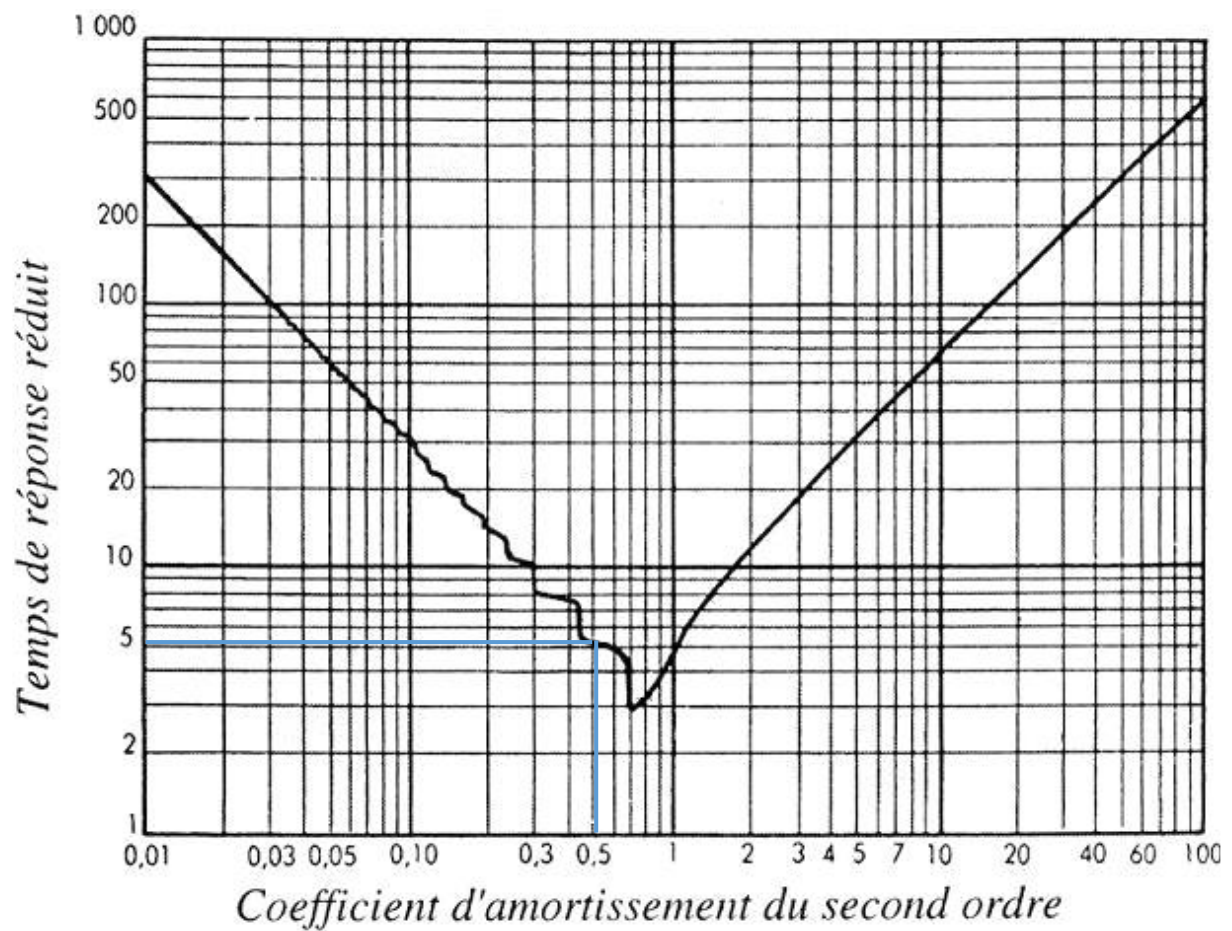
Donc :

$$K = 1$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{6 \cdot 10^{-4}}} = 40,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\xi = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot \omega_0}{2} = 0,612$$

Q20 :



On trouve en lisant l'abaque :

$$t_{r5\%} \cdot \omega_0 = 5,1$$

Donc :

$$t_{r5\%} = 0,125 \text{ s}$$

Ce temps est largement inférieur aux exigences de 2 s.