

DATE			HEURE DÉBUT	HEURE FIN
21	05	2025	8 h 10	12 h 10

CLASSE	MPSI
---------------	-------------

MATIERE	S.I.I.
----------------	---------------

PROFESSEUR	LILLONI 169
-------------------	--------------------

CONSIGNES	Calculatrice	OUI <input checked="" type="checkbox"/>	NON <input type="checkbox"/>
	Documents	OUI <input type="checkbox"/>	NON <input checked="" type="checkbox"/>
	<ul style="list-style-type: none"> - Sujet en 2 parties (« Goniomètre » pages 2 à 12 puis « Frein » pages 13 à 15) - Répondre exclusivement sur le document réponse - Encadrer les résultats 		

Goniomètre à actionneurs piézoélectriques

1. Présentation

1.1. La radiocristallographie

La cristallographie par rayons X ou radiocristallographie est une méthode d'analyse de la matière qui consiste à analyser la diffraction d'un faisceau lumineux (de fréquence typique de 10^{16} à 10^{19} Hz) sur un échantillon cristallin. Ce procédé est très utilisé en biologie pour déterminer la structure des molécules du vivant. Dans ce cadre, un monocristal de la molécule est placé dans un faisceau de rayons X monochromatiques et la diffraction observée pour différentes positions du cristal dans le faisceau de rayons X permet de déterminer non seulement la structure du cristal, mais aussi et surtout la structure de la molécule.

1.2. Le goniomètre SmarGon

Le positionnement de l'échantillon doit être très précis : il est réalisé par un équipement appelé goniomètre et correspond à une structure robotique à 6 mobilités. Le SmarGon (de la société SmarAct GmbH), présenté sur la **Figure 1** et sur la **Figure 2**, est un goniomètre de dernière génération qui utilise une structure mécanique mixte série-parallèle et qui permet d'atteindre des précisions inférieures à 10^{-3} degrés de position angulaire et inférieures à 5 nm de position linéaire.

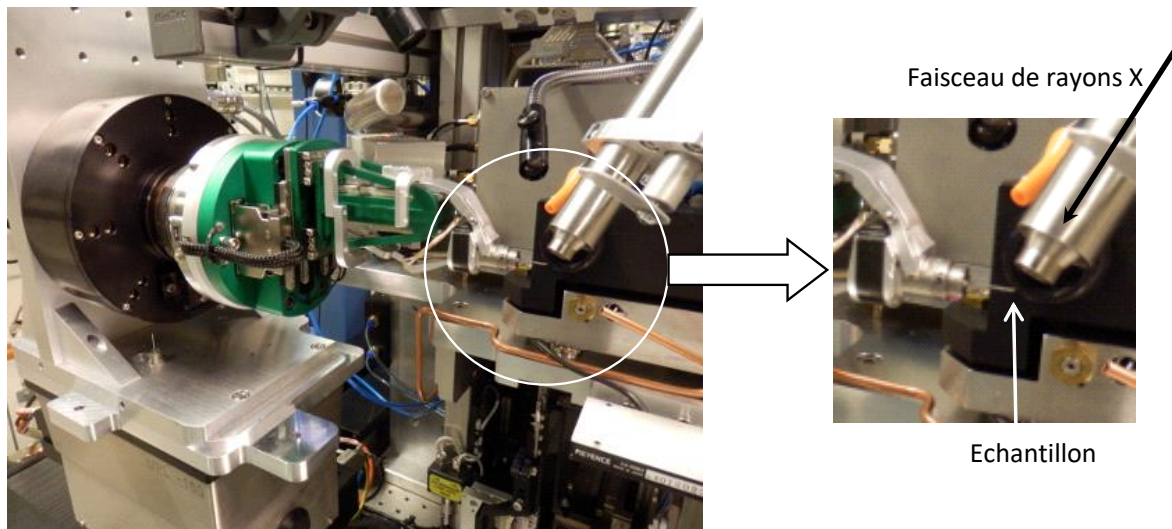


Figure 1 : photographie du goniomètre SmarGon

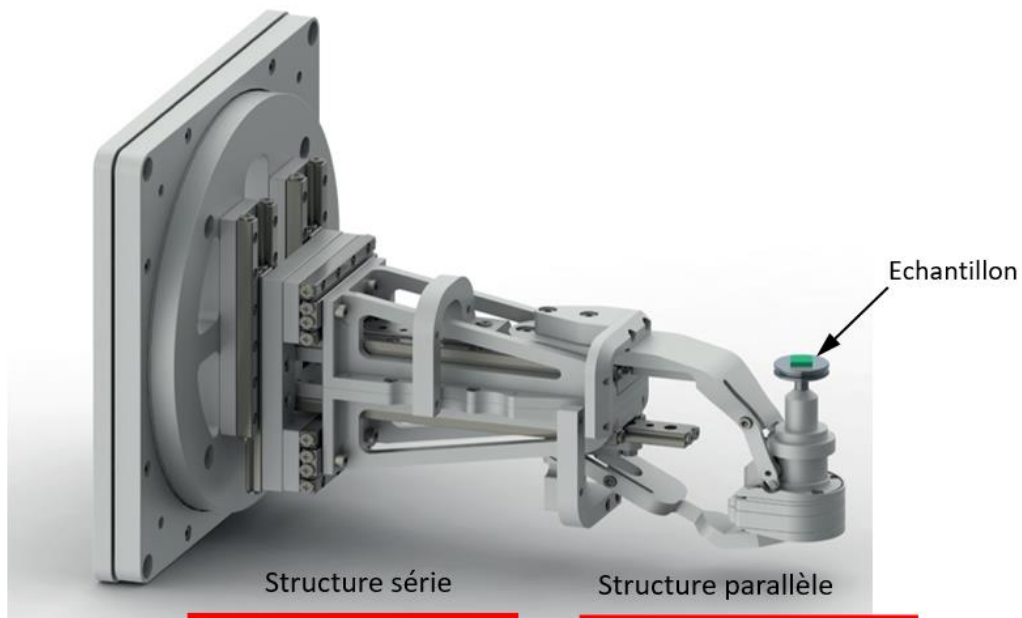


Figure 2 : modèle tri-dimensionnel du goniomètre SmarGon

Le goniomètre étudié (**Figure 3**) permet donc :

- de positionner l'échantillon au centre du faisceau de rayons X, ce qui nécessite le pilotage des 3 coordonnées cartésiennes du centre de l'échantillon : x , y et z ;
- d'orienter l'échantillon dans l'espace, ce qui nécessite le pilotage de 3 angles d'orientation : ψ , θ et φ .

Ainsi la pièce qui porte l'échantillon à étudier possède 6 degrés de liberté par rapport au bâti.

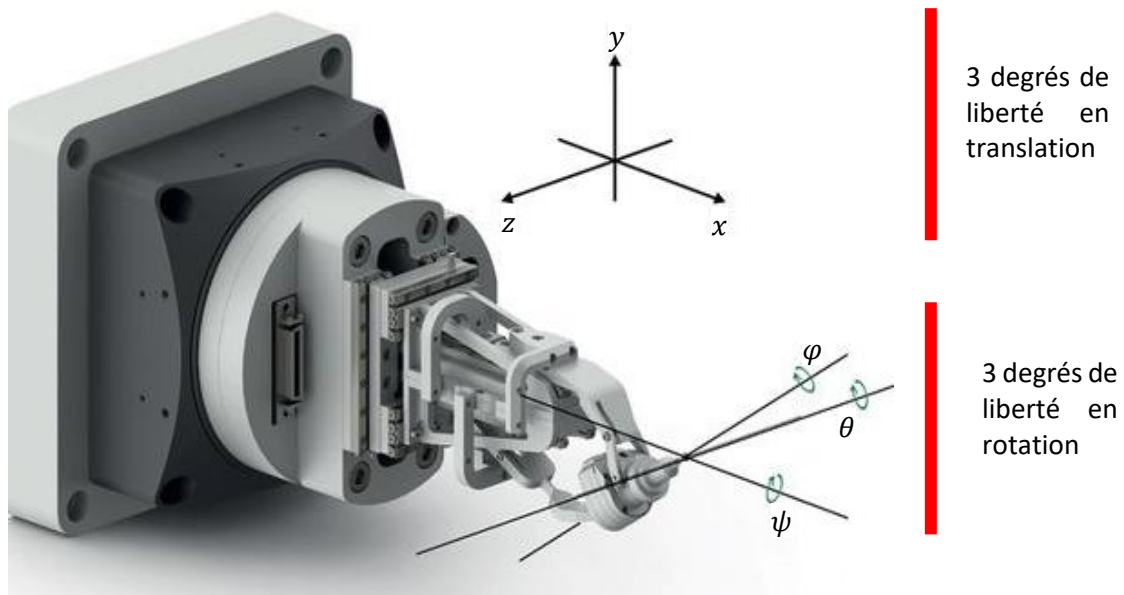


Figure 3 : les six degrés de positionnement de l'échantillon du goniomètre SmarGon

La société SmarAct, concevant et produisant le SmarGon, annonce des performances de précision de positionnement très élevées. Ces performances annoncées sont rassemblées dans le diagramme des exigences représenté sur l'**Annexe 1**. L'enjeu de ce sujet est de vérifier certaines de ces performances en modélisant puis simulant le goniomètre SmarGon.

2. Modélisation des chaînes fonctionnelles

L'organisation topo-fonctionnelle étant similaire sur les six axes du positionneur, on ne s'intéresse ici qu'à la chaîne de puissance à l'origine de la rotation d'angle θ .

Question 1. A l'aide du diagramme de blocs internes donné sur l'**Annexe 2**, compléter sur le document-réponses la chaîne de puissance du goniomètre SmarGon, relative à la rotation d'angle θ .

3. Choix des actionneurs

On cherche à sélectionner dans le catalogue du constructeur (**Annexe 3**), les actionneurs capables de vérifier les exigences 1.2.3 et 1.1 du cahier des charges.

On s'intéresse ici à la structure du goniomètre qui autorise le réglage des paramètres géométriques de l'angle d'orientation θ et de l'abscisse x_E du centre de l'échantillon à l'aide de deux actionneurs linéaires situés au sein de deux liaisons glissière.

3.1. Choix d'un actionneur validant l'exigence 1.2.3 « Domaine atteignable »

Pour vérifier l'exigence « Domaine atteignable » (**Annexe 1**), on détermine à l'aide d'une fermeture géométrique les courses nécessaires des deux actionneurs linéaires.

Dans la position étudiée, le modèle cinématique de la structure est donné **Figure 4**.

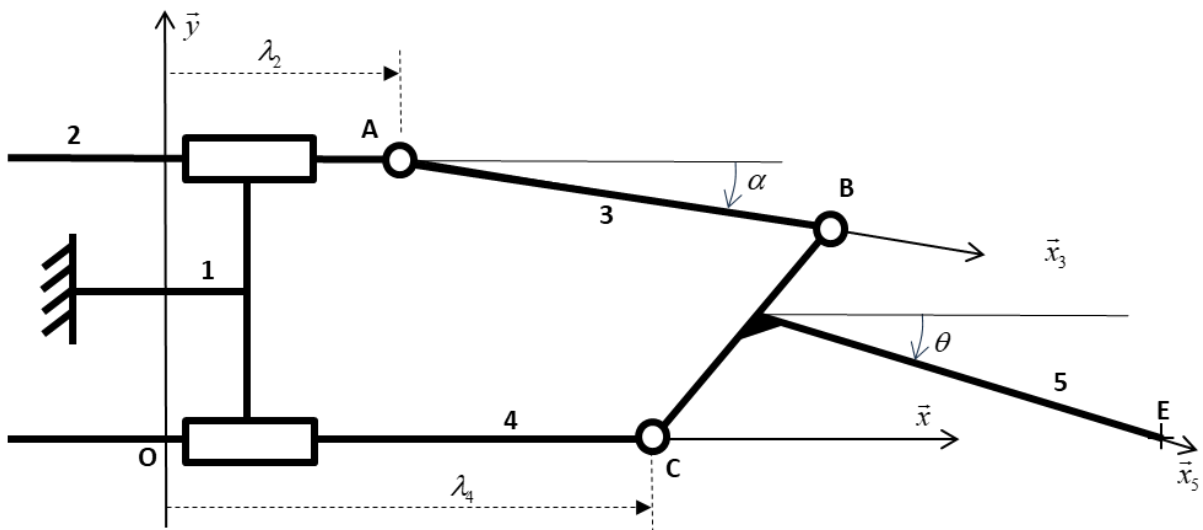


Figure 4 : Modèle cinématique plan de la structure terminale

Il est à noter que dans la position du schéma, les angles α et θ sont négatifs.

Données géométriques :

Au bâti 1 est associé le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et à chaque solide i est associée une base orthonormée directe $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z})$. Le problème étant plan, le vecteur \vec{z} est commun à toutes les bases.

$\lambda_2(t)$ et $\lambda_4(t)$ sont les paramètres de position imposés par les deux actionneurs linéaires.

On note :

$$\overrightarrow{OC} = \lambda_4(t) \cdot \vec{x} \quad \overrightarrow{AB} = l_3 \cdot \vec{x}_3 \quad \overrightarrow{OE} \cdot \vec{x} = x_E(t)$$

$$\overrightarrow{OA} = \lambda_2(t) \cdot \vec{x} + e \cdot \vec{y} \quad \overrightarrow{CB} = b \cdot \vec{x}_5 + c \cdot \vec{y}_5 \quad \alpha(t) = (\vec{x}, \vec{x}_3) = (\vec{y}, \vec{y}_3) \text{ et } \theta(t) = (\vec{x}, \vec{x}_5) = (\vec{y}, \vec{y}_5)$$

Les deux paramètres utiles au positionnement de l'échantillon sont $\theta(t)$ et $x_E(t)$.

A partir de la position de la **Figure 4**, on considère deux mouvements simples distincts :

- mouvement 1 : $\theta(t)$ est constant et $x_E(t)$ est croissant ;
- mouvement 2 : $x_E(t)$ est constant et $\theta(t)$ est croissant.

Question 2. Pour chacun des « mouvement 1 » et « mouvement 2 » indiquer les déplacements nécessaires des actionneurs linéaires. Compléter le tableau du document-réponses.

On note $\Delta\lambda = \lambda_4(t) - \lambda_2(t)$.

Question 3. A partir d'une fermeture géométrique, déterminer une équation du second degré de la forme : $\Delta\lambda^2 + A_1(\theta).\Delta\lambda + B_1(\theta) = 0$ où $A_1(\theta)$ et $B_1(\theta)$ sont deux fonctions de θ à expliciter.

Grâce à une simulation, on obtient la courbe de la **Figure 5**.

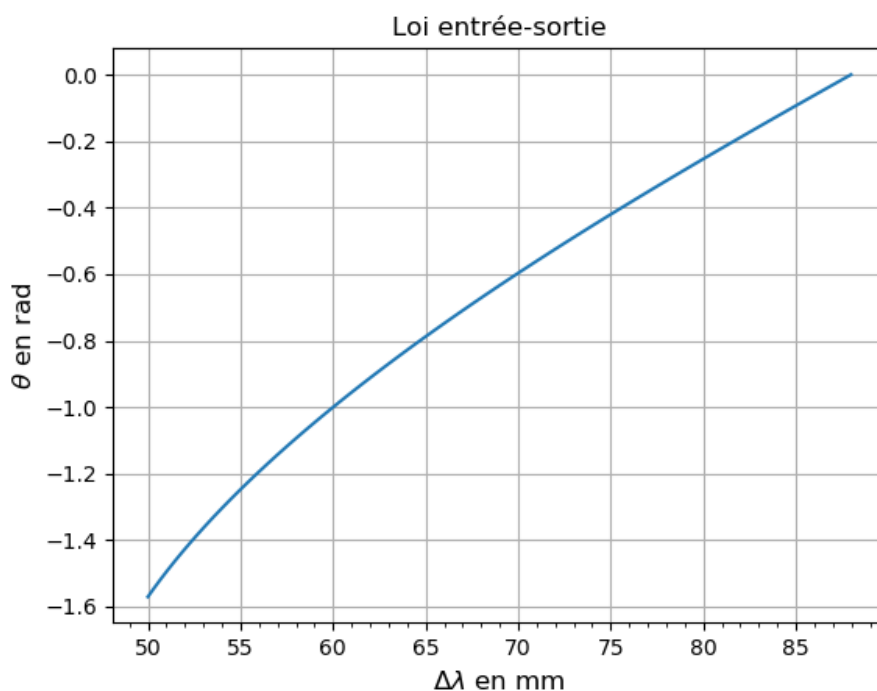


Figure 5 : loi entrée-sortie simulée du paramètre θ en fonction de $\Delta\lambda$

Question 4. Quel(s) actionneur(s) permet(t) de valider à la fois la plage de variation de x_E et celle de θ de l'exigence 1.2.3 ?

3.2. Choix d'un actionneur validant l'exigence 1.1 « Maintenir en position »

Pour vérifier l'exigence « Maintenir en position » (**Annexe 1**), on détermine à l'aide d'une étude statique la force à fournir par l'actionneur linéaire le plus sollicité.

Hypothèses :

- les liaisons sont supposées parfaites ;
- le repère lié au bâti 1 est considéré comme galiléen, l'ensemble du mécanisme est en équilibre dans ce repère, dans la position représentée **Figure 4** ;
- le problème est plan dans (O, \vec{x}, \vec{y}) .
- Le poids des pièces est négligé, sauf celui du solide 5 auquel est fixé un actionneur d'orientation autour de l'axe (E, \vec{y}_5) . Ce poids exerce une action mécanique sur la pièce 5 modélisée par : $\{T_{ext \rightarrow 5}\} = \left\{ \begin{matrix} -P \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_5}$ avec $P > 0$ et $\overline{CG_5} = d \cdot \vec{x}_5 + \frac{c}{2} \cdot \vec{y}_5$, où G_5 est le centre de gravité de la pièce 5.

Question 5. Montrer par utilisation du TMS en A appliqué à 3 que la résultante des actions mécaniques de 5 sur 3, notée $\vec{R}_{5 \rightarrow 3}$, a pour direction le vecteur \vec{x}_3 .

On notera alors $\vec{R}_{5 \rightarrow 3} = X_{53} \cdot \vec{x}_3$.

Question 6. Isoler 5, déterminer X_{53} , en fonction de P et des grandeurs géométriques nécessaires. Préciser l'équation du principe fondamental de la statique utilisée.

Le torseur $\{T_{act \rightarrow 2}\}$ modélisant l'action mécanique de l'actionneur linéaire sur 2 a pour résultante $\vec{R}_{act \rightarrow 2} = F \cdot \vec{x}$.

Question 7. Isoler $\{2+3\}$ et déterminer F en l'exprimant sous la forme $F = P \cdot \frac{A_2 \cdot \cos(\theta) + B_2 \cdot \sin(\theta)}{c \cdot \cos(\theta - \alpha) + b \cdot \sin(\theta - \alpha)} \cdot \cos(\alpha)$ où A_2 et B_2 sont des constantes à déterminer.

Par simulation, on peut calculer les valeurs de F et on obtient la courbe de la **Figure 6** ci-après :

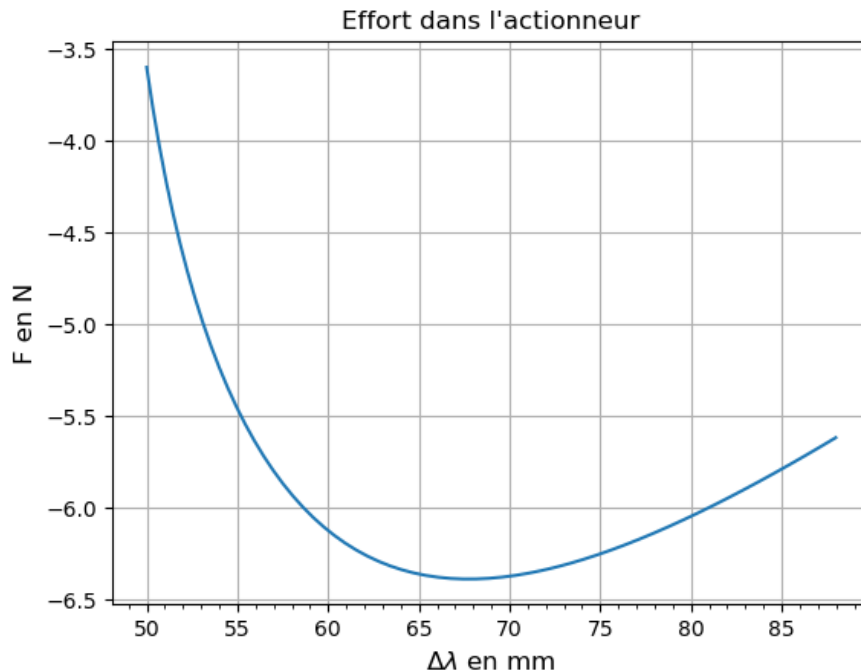


Figure 6 : effort dans l'actionneur F simulé en fonction de $\Delta\lambda$

Question 8. A partir des références d'actionneurs données en **Annexe 3**, déterminer le ou les actionneurs permettant de vérifier la force à exercer (exigence 1.1).

4. Validation des exigences de stabilité et de précision

4.1. Vérification de l'exigence de stabilité

L'objectif de cette sous-partie est de vérifier l'exigence 1.2.4 (**Annexe 1**) de stabilité de l'actionneur en élaborant un modèle de connaissance linéaire.

L'actionneur installé sur le goniomètre SmarGon est un actionneur linéaire piézoélectrique. Cette technologie est utilisée afin d'avoir le niveau de précision souhaité. L'actionneur linéaire utilisé dans le SmarGon est un actionneur pas-à-pas. Chaque pas de déplacement est créé en utilisant le principe inverse de l'effet piézoélectrique. Pour cela, le matériau utilisé dans la conception de l'actionneur est une céramique, constituée en multi-couches. Ces couches sont polarisées et recouvertes d'électrodes afin de pouvoir appliquer un champ électrique d'excitation. Sous l'effet de ce champ, le matériau piézoélectrique répond par une déformation qu'il faut ensuite utiliser pour créer un petit déplacement, appelé pas. Le modèle électro-mécanique proposé pour cette étude est représenté sur la **Figure 7**. On notera que dans cette modélisation, la force extérieure due aux poids des différentes pièces du mécanisme de la structure terminale n'est pas prise en compte, car influant peu le comportement dynamique étudié ici. Le paramètre $\lambda(t)$ représente le déplacement d'un actionneur piézoélectrique, noté $\lambda_2(t)$ et $\lambda_4(t)$ dans les parties précédentes du sujet.

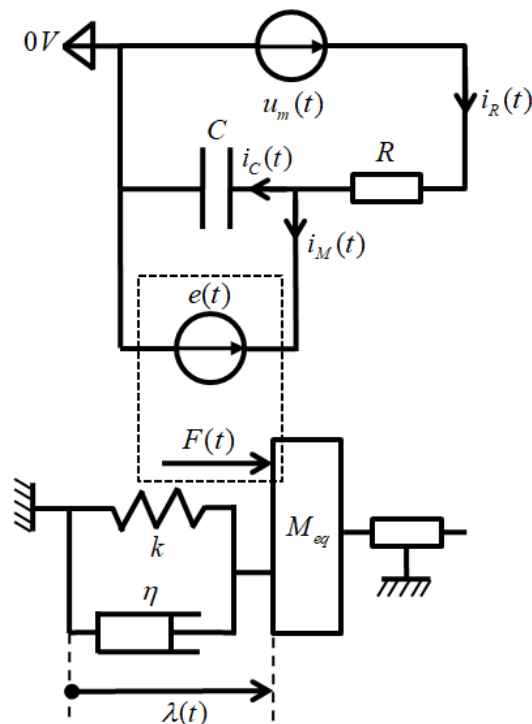


Figure 7 : modèle électro-mécanique de l'actionneur linéaire piézoélectrique

Nous adopterons, pour la conversion électro-mécanique associée à l'effet piézoélectrique du matériau, le modèle de connaissance régi par les deux équations suivantes :

$$i_M(t) = k_i \cdot \frac{d\lambda}{dt}(t) \text{ et } F(t) = k_i \cdot e(t)$$

k_i est appelée la constante de force de l'actionneur et dépend des composites utilisés ainsi que de la géométrie des actionneurs ($k_i = 4 \text{ N} \cdot \text{V}^{-1}$).

La partie basse du modèle (**Figure 7**) représente un système masse, ressort, amortisseur modélisant la chaîne de transmission de puissance du SmarGon. Les paramètres k et η caractérisent respectivement la raideur et l'amortissement du corps piézoélectrique. $F(t)$ représente la force exercée par l'actionneur linéaire sur la masse équivalente M_{eq} . Nous supposerons qu'à l'instant initial, toutes les grandeurs temporelles sont nulles.

Question 9. Déterminer une équation différentielle reliant $F(t)$ et ses dérivées successives à $u_m(t)$ et $\frac{d\lambda}{dt}(t)$ de la forme $u_m(t) = a_0 \cdot F(t) + a_1 \cdot \frac{dF}{dt}(t) + a_2 \cdot \frac{d\lambda}{dt}(t)$. Vous indiquerez les expressions des constantes a_0 , a_1 et a_2 dans les cadres du document-réponses.

Question 10. Compléter le schéma-blocs du document-réponses en indiquant les fonctions de transfert des blocs 1 et 2.

$F(t)$ représente la force exercée par l'actionneur linéaire sur la masse équivalente M_{eq} , provoquant ainsi un pas de déplacement. Les efforts développés par le ressort et l'amortisseur sur la masse équivalente, $F_r(t)$ et $F_a(t)$, obéissent aux lois de comportement suivantes :

$$F_r(t) = -k \cdot \lambda(t) \text{ et } F_a(t) = -\eta \cdot \frac{d\lambda}{dt}(t)$$

L'actionneur linéaire étant utilisé horizontalement, nous négligerons l'impact de la pesanteur.

Question 11. Démontrer, en utilisant la 2^e loi de Newton (ou théorème de la résultante dynamique TRD en SII), en indiquant bien le système isolé, l'équation différentielle du mouvement de la masse équivalente : $M_{eq} \cdot \frac{d^2\lambda}{dt^2} = F - k \cdot \lambda - \eta \cdot \frac{d\lambda}{dt}$

On note $V(p) = p\lambda(p)$.

Question 12. Compléter le schéma-blocs du document-réponses en indiquant les fonctions de transfert des blocs 3, 4 et 5.

Question 13. Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\lambda(p)}{U_m(p)}$ du modèle ainsi obtenu. Ecrire $H(p)$ sous la forme d'une fraction rationnelle dont le polynôme du dénominateur admet un coefficient constant égal à 1.

Une étude numérique a permis d'obtenir les pôles de la fonction de transfert $H(p)$ représentés dans le plan complexe sur la **Figure 8** ci-dessous :

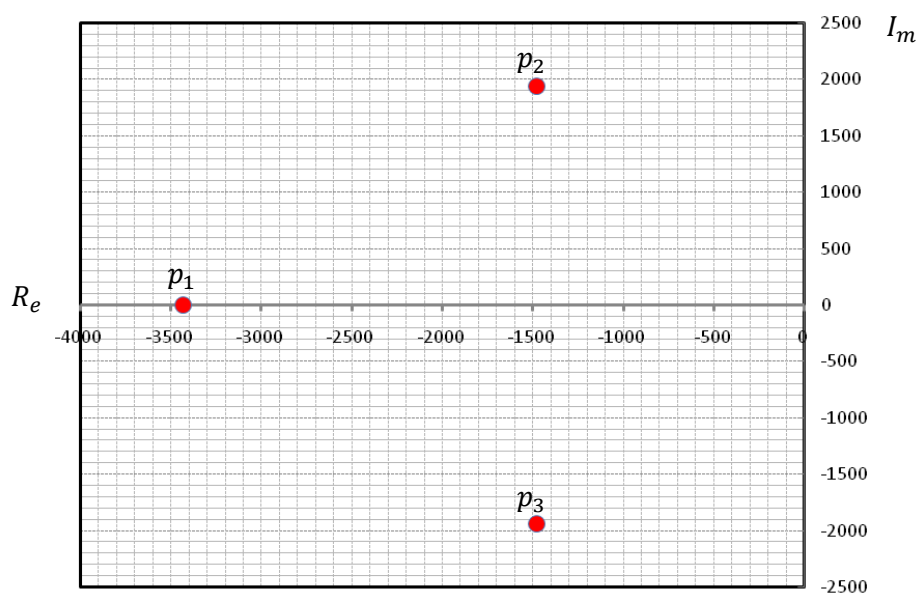


Figure 8 : pôles de la fonction de transfert $H(p)$ dans le plan complexe

Question 14. Donner les valeurs des pôles p_i de la fonction de transfert $H(p)$. Conclure sur la validité de l'exigence 1.2.4 de l'actionneur piézoélectrique. Justifier.

Conclusion : nous avons vérifié la stabilité de l'actionneur électrique à l'aide du modèle linéaire. Nous pouvons désormais vérifier ses performances en précision et rapidité.

4.2. Vérification de l'exigence 1.2.1 a du cahier des charges

L'objectif de cette sous-partie est de vérifier l'exigence 1.2.1 a du cahier des charges (Annexe 1). Lors du mode « scan », le pas de déplacement doit être inférieur ou égal à 3 μm.

Le goniomètre doit permettre de placer très finement l'échantillon pour analyse. La précision de positionnement lors de ce mode de déplacement très précis, appelé mode « scan » doit être inférieure ou égale à 3 μm.

Afin de valider en avant-projet le choix de l'actionneur piézoélectrique, nous soumettons celui-ci à un échelon de tension tel que $u_m(t) = U_0 \cdot u(t)$ avec $U_0 = 10 V$, $u(t)$ représentant la fonction échelon unitaire. Nous indiquons les valeurs numériques de k et k_i : $k = 16 N \cdot \mu m^{-1}$ et $k_i = 4 N \cdot V^{-1}$.

Question 15. Montrer que l'on peut mettre la fonction de transfert $H(p)$ sous la forme canonique suivante : $H(p) = \frac{\lambda(p)}{U_m(p)} = \frac{H_0}{(1+\tau \cdot p) \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2\right)}$. Indiquer dans le document-réponses les

expressions littérales des paramètres caractéristiques τ , ξ et ω_0 en fonction des pôles p_i .

Question 16. Discuter de la possibilité de réduire l'ordre de $H(p)$.

Question 17. Déterminer l'expression littérale de la valeur finale du déplacement $\lambda(t)$ notée λ_{fin} .

Question 18. Faire l'application numérique et conclure sur la capacité de l'actionneur à respecter l'exigence 1.2.1 a du cahier des charges.

Conclusion : nous avons vérifié la précision de positionnement en mode de déplacement fin. Nous pouvons désormais valider le mode de déplacement rapide : le mode d'approche.

4.3. Vérification de l'exigence 1.2.2 d du cahier des charges

L'objectif de cette partie est de valider l'exigence 1.2.2 d du cahier des charges (Annexe 1). Cette exigence s'applique au mode d'approche en déplacement rapide.

Le fonctionnement du mode d'approche est basé sur le phénomène « adhérence-glissement » (« stick-slip » en anglais). Ainsi, lorsque la variation de vitesse de l'actionneur linéaire est faible, il va entraîner un coulisseau en translation par adhérence. Au contraire, lorsque la variation de vitesse est élevée (dans un sens ou l'autre), il n'entraînera plus le coulisseau, glissant sur ce dernier. Ce principe est illustré sur la **Figure 9** ci-dessous.

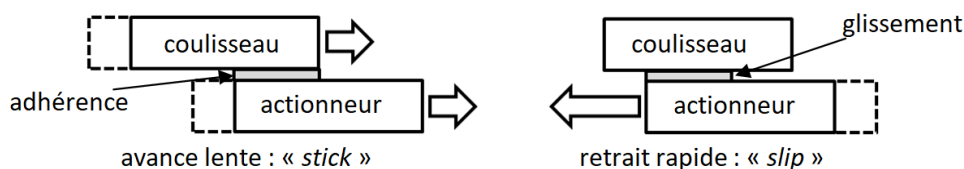


Figure 9 : phénomène de « stick-slip »

Le déplacement continu du coulisseau est obtenu par une succession rapide de la séquence suivante : un mouvement d'avance lent de l'actionneur puis un mouvement rapide de retrait pour assurer une phase de glissement : le « slick ».

Afin de réaliser une succession de pas de déplacement, nous souhaitons solliciter l'actionneur linéaire avec une tension périodique $u_m(t)$ de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ et d'amplitude $U_0 = 10 V$ telle que représentée sur la **Figure 10**.

La fréquence de pilotage a un rôle important afin d'assurer un déplacement rapide.

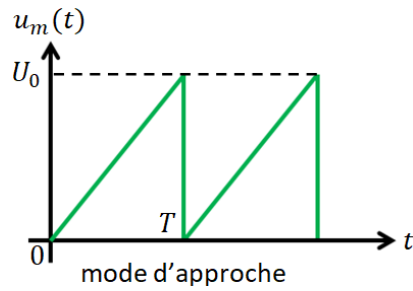


Figure 10 : pilotage de l'actionneur en mode d'approche

La fréquence de pilotage a un rôle important afin d'assurer un déplacement rapide, c'est-à-dire pour obtenir une vitesse de déplacement élevée. Pour cette raison, le pilotage de l'actionneur est choisi en très hautes fréquences : $\omega > 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$, sans sortir de la bande passante de l'actionneur. L'objectif de cette partie est d'analyser le comportement fréquentiel de l'actionneur piézo-électrique afin de vérifier l'exigence 1.2.2 d.

Pour la suite du sujet, nous considérerons les valeurs numériques suivantes pour les paramètres caractéristiques de $H(p)$:

$$H_0 = 0,3 \mu\text{m.V}^{-1}; \tau = 0,3 \text{ ms}; \xi = 0,08; \omega_0 = 20000 \text{ rad.s}^{-1}$$

Question 19. Compléter le document-réponses en représentant les diagrammes asymptotiques de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert $H(p)$. Indiquer les valeurs asymptotiques, les valeurs des pentes ainsi que les valeurs des pulsations particulières.

Une étude numérique a permis de tracer le diagramme de Bode du gain de $H(p)$, représenté sur la **Figure 11**, pour $\omega \in [10000 \text{ rad.s}^{-1}, 22000 \text{ rad.s}^{-1}]$.

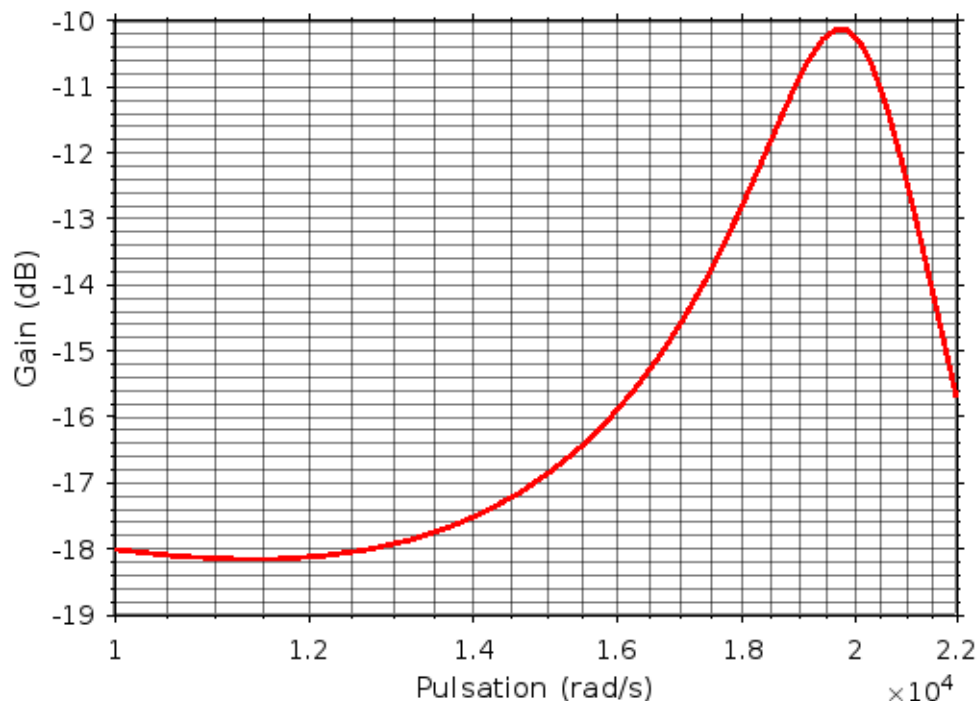


Figure 11 : diagramme de Bode du gain de $H(p)$

Question 20. Indiquer la valeur de la pulsation de résonance ω_R . Déterminer l'amplitude du déplacement $\lambda(t)$ en régime permanent pour la pulsation de résonance ω_R . On donne $\sqrt{10} \approx 3$.

Question 21. Par quel facteur le déplacement est-il multiplié en sollicitant l'actionneur piézoélectrique à la pulsation de résonance ω_R plutôt qu'à la pulsation de 10000 rad.s^{-1} ? On donne $\sqrt[5]{100} \approx 2,5$.

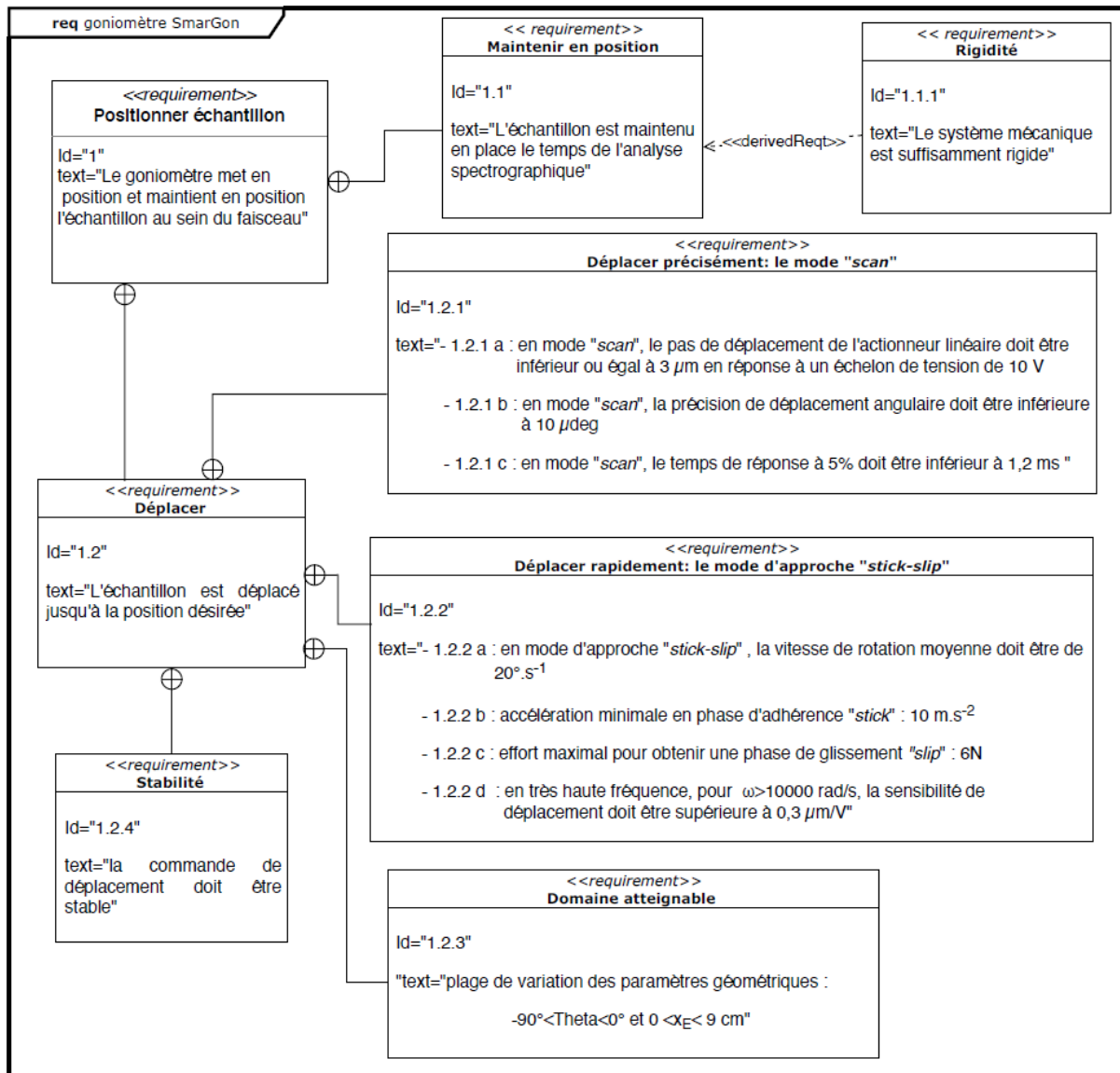
Question 22. Conclure sur la validité de l'exigence 1.2.2 d du cahier des charges.

Conclusion : nous avons obtenu une sensibilité maximale en pilotant les actionneurs à leur résonance en mode d'approche, nous pouvons maintenant étudier les performances dynamiques du mode d'approche.

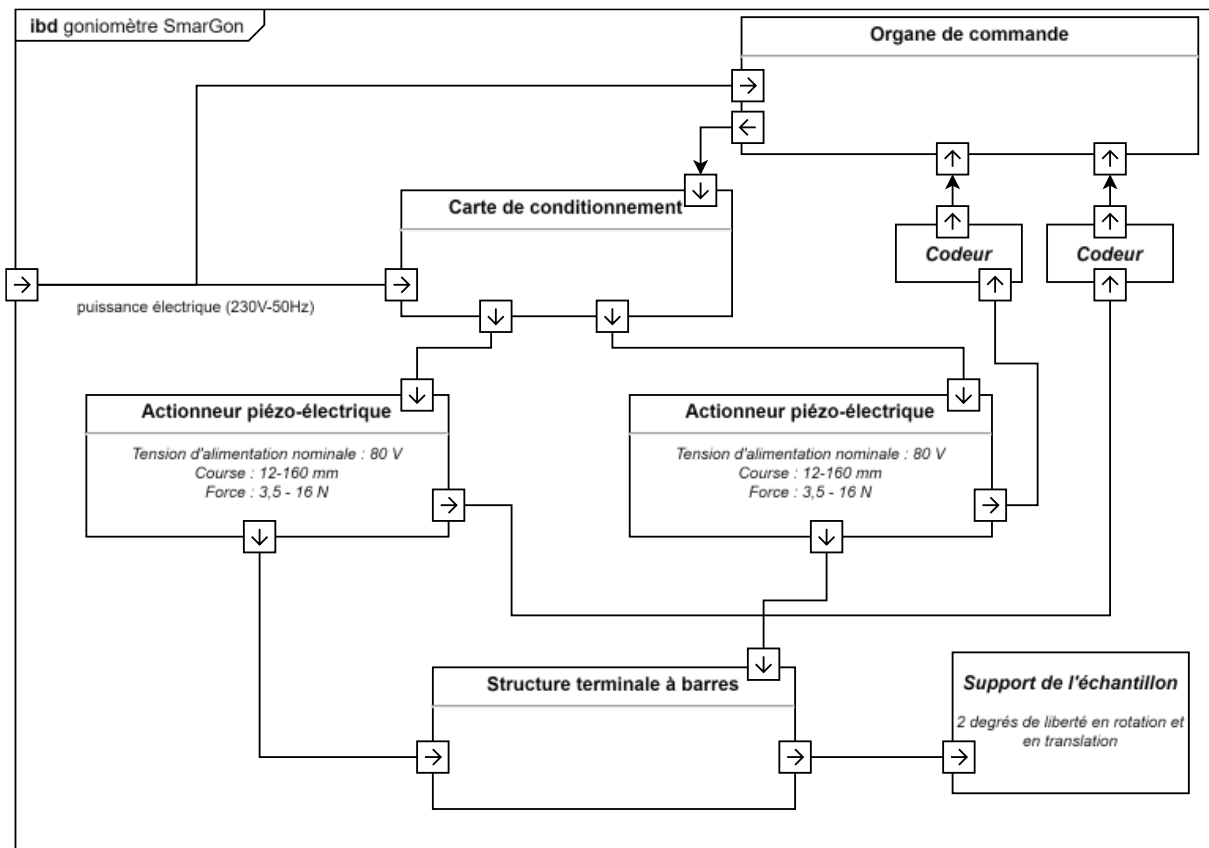
FIN

Annexes

Annexe 1 : Diagramme des exigences (req)



Annexe 2 : Diagramme de blocs internes (ibd)

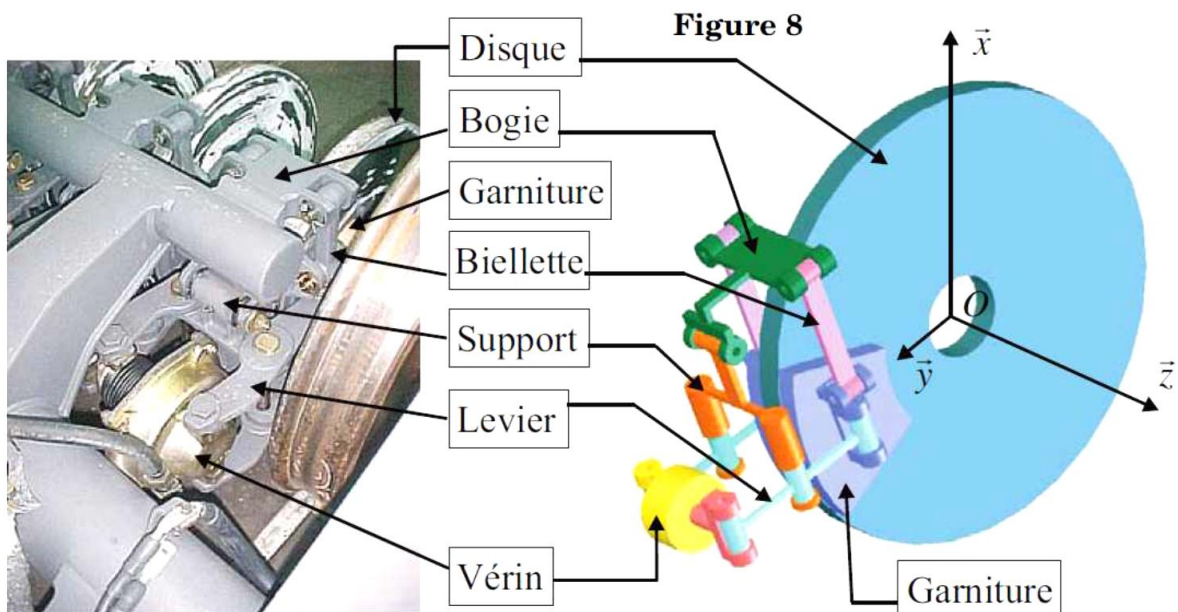
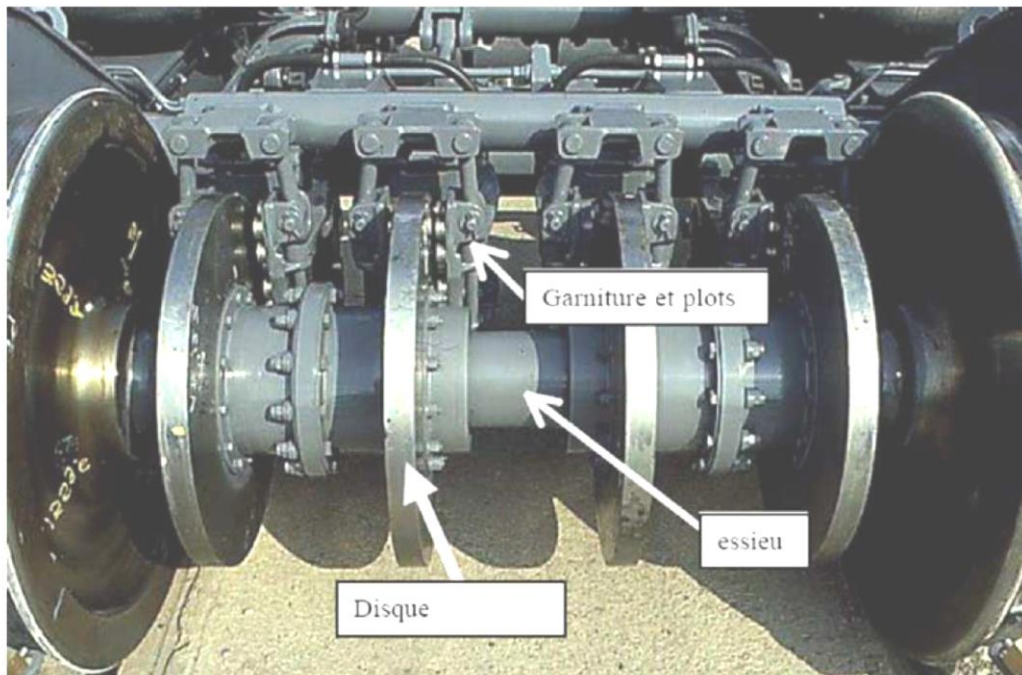


Annexe 3 : Caractéristiques mécaniques des actionneurs piézoélectriques disponibles

Référence	Course	Force	Dimensions de la section transversale de l'actionneur
	[mm]	[N]	[mm]
SLC 17	12	3,5	17x8,5
SLC 24	54	5,5	24x10,5
CLS 32	102	7	32x11
CLS 52	123	10,5	52x14
CLS 92	160	16	92x17

Frein de TGV

On étudie les exigences de la transmission d'effort dans un dispositif de freinage de TGV.



Un frein à disque équipant une roue de TGV est représenté page précédente et figure 1. Ce frein est composé d'un vérin pneumatique flottant (2,3) agissant sur deux leviers (4) et (5) mobiles en rotation par rapport au support (1) et assurant l'effort presser des garnitures (6) et (7) sur le disque (8).

On désire dans cet exercice déterminer la relation entre la pression dans le vérin pneumatique et le moment de freinage.

On se propose dans un premier temps de déterminer le torseur représentatif des actions exercées par les garnitures (6) et (7) sur le disque (8).

Le disque tourne par rapport au support supposé fixe par rapport au bogie (châssis du train) à une vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{8/6} = \omega_{8/6} \cdot \vec{Z}$, avec, comme indiqué en figure 2, $\omega_{8/6} < 0$.

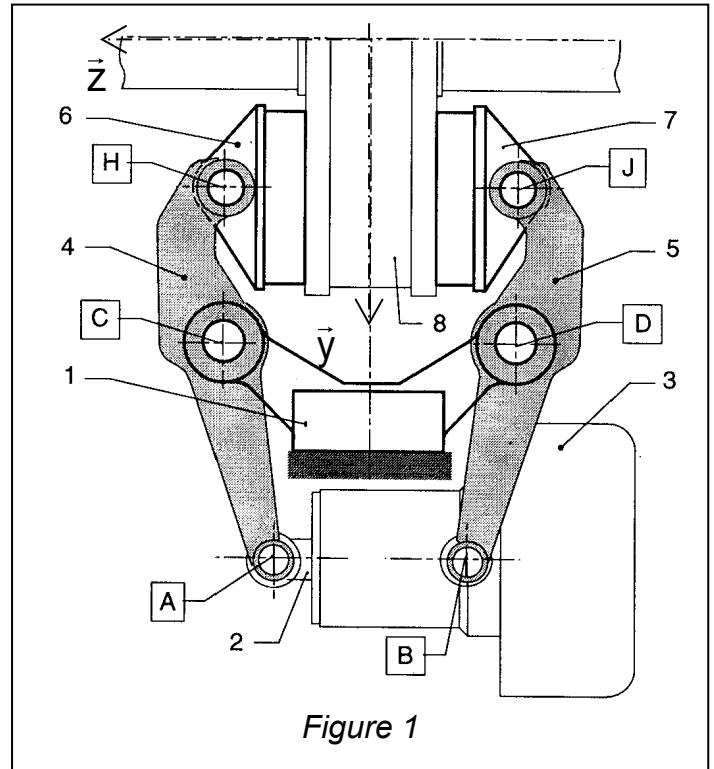


Figure 1

Pour simplifier les calculs en première approximation, on suppose que la garniture est celle représentée sur la figure 2.

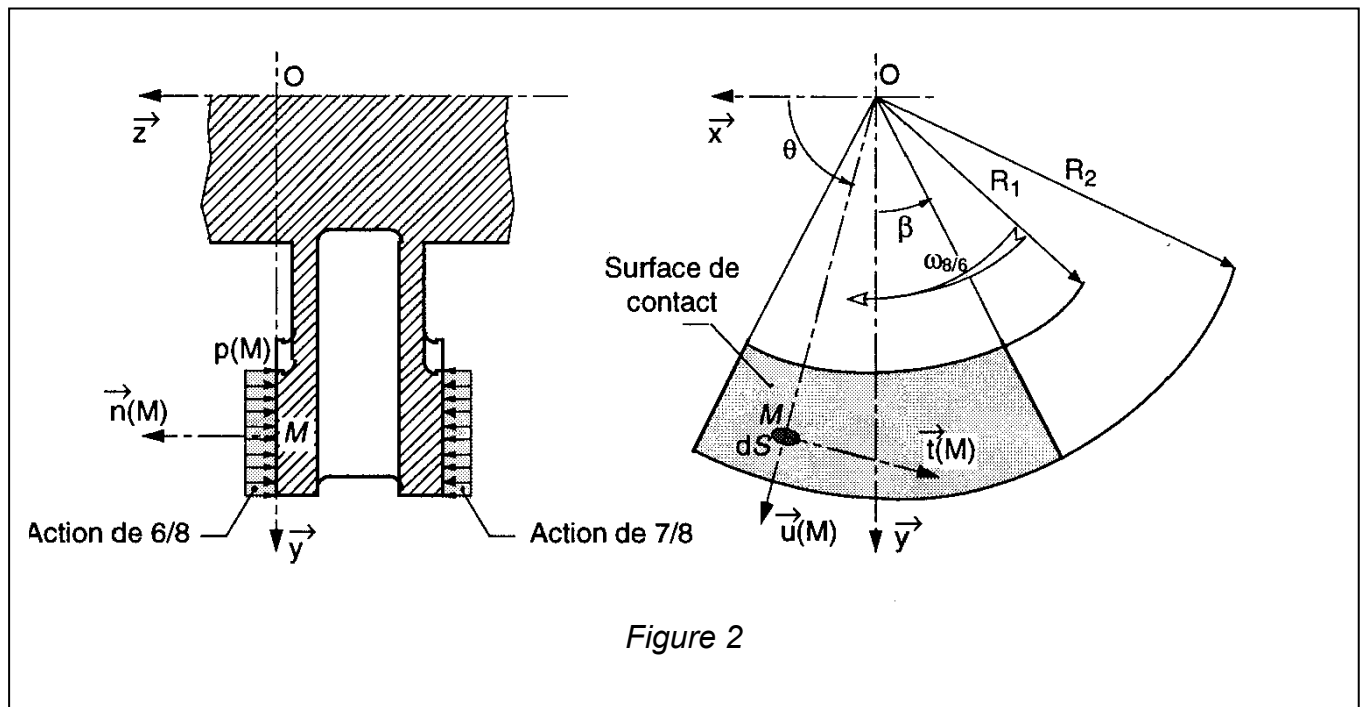


Figure 2

Caractéristiques géométriques de la surface :

- Rayon extérieur : $R_2=305\text{mm}$
- Rayon intérieur : $R_1=155\text{mm}$
- Angle au centre de la garniture : $2\beta=36^\circ$

Caractéristiques du contact :

- Coefficient de frottement : $f=0,5$
- Pression de contact supposée uniforme, et notée : $p(M)=p_0$

Forme générale du torseur représentatif de l'action de contact de la garniture (6) sur le disque (8) :

$$\left\{ T_{(6 \rightarrow 8)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(6 \rightarrow 8)} \\ \vec{M}_{(O, 6 \rightarrow 8)} \end{array} \right\}_O$$

On note alors la force de freinage $F_0 = -\vec{R}_{(6 \rightarrow 8)} \cdot \vec{z}$

et le couple de freinage $M_0 = 2 \cdot \vec{M}_{(O, 6 \rightarrow 8)} \cdot \vec{z}$

Question 1 : Rappeler les lois de Coulomb dans le cas du glissement en un point M de contact. Démontrer alors que l'expression de la force élémentaire $d\vec{f}$ appliquée en M par 6 sur la surface élémentaire dS de 8 située autour de M s'écrit $d\vec{f} = -p_0 \cdot dS \cdot \vec{n}(M) + f \cdot p_0 \cdot dS \cdot \vec{t}(M)$.

On remarque que la composante normale de la force élémentaire est en $-\vec{n}(M) = -\vec{z}$.

Question 2 : Déterminer les éléments de réduction du torseur $\left\{ T_{(6 \rightarrow 8)} \right\}$, en fonction de R_1 , R_2 , β , f et p_0 . En déduire les expressions littérales de F_0 et M_0 .

Question 3 : En déduire la relation littérale entre F_0 et M_0 . Commenter l'influence des différents paramètres géométriques et de f .

On prendra pour la suite $\vec{CH} = \vec{DJ} = -a\vec{y}$, $\vec{AC} = -b\vec{y} + c\vec{z}$ et $\vec{BD} = -b\vec{y} - c\vec{z}$
Avec $a=200\text{mm}$, $b=300\text{mm}$, $c=30\text{mm}$

Question 4 : Proposer un schéma du vérin pneumatique et montrer que la force $\vec{A}_{2 \rightarrow 4}$ de poussée du vérin en A est selon \vec{z} .

Question 5 : En isolant 6+4 trouver la relation entre F_0 et $\left\| \vec{A}_{4 \rightarrow 2} \right\|$, a et b.

Question 6 : Déterminer numériquement la poussée $\left\| \vec{A}_{4 \rightarrow 2} \right\|$ nécessaire du vérin pour obtenir un couple de freinage de $M_0=1000\text{Nm}$.