NOM : CORRIGE

Notation : $x(t) \xrightarrow{L} X(p)$

QUESTIONS DE COURS

Cours 1 : Définition de X(p) :

$$X(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot x(t)\, dt$$

Cours 2 : Propriété de linéarité

Enoncé :

$$L[\alpha \cdot x_1(t) + \beta\, x_2(t)](p) = \alpha\, X_1(p) + \beta \cdot X_2(p)$$

ou $\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) \xrightarrow{L} \lambda_1 \cdot X_1(p) + \lambda_2 \cdot X_2(p)$

Cours 3 : Théorème de la dérivée

Enoncé : $L[\dot{x}(t)](p) = p\,X(p) - x(t=0)$

ou $\dfrac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{L} p\,X(p) - x(t=0)$

Exercice 1 : En précisant les propriétés et résultats employés, exprimer les transformées de Laplace de la fonction du temps suivante :

$$y(t) = 4e^{-3t}\sin(t+2)$$

je développe $y(t) = 4e^{-3t}\sin t\cos(2) + 4e^{-3t}\sin(2)\cos(t)$

$= 4\cos(2)\underbrace{e^{-3t}\sin t}_{\text{tableau}} + 4\sin(2)\underbrace{e^{-3t}\cos(t)}_{\text{tableau}}$

d'où par linéarité $\quad Y(p) = 4\cos(2)\dfrac{1}{(p+3)^2+1^2} + 4\sin(2)\dfrac{p+3}{(p+3)^2+1^2}$

ou une fois remis au même dénominateur

$$Y(p) = 4\,\frac{\sin(2)\,p + 3\sin(2) + \cos(2)}{(p+3)^2 + 1}$$

Exercice 2 : Déterminer les fonctions du temps dont les transformées de Laplace sont les suivantes :

$$S_1(p) = \frac{1}{(2p+1)^2}$$

$S_1(p) = \frac{1}{2^2\left(p+\frac{1}{2}\right)^2}$ factorisation

d'où par linéarité de la T.L.

$$\boxed{s_1(t) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}t}}$$

x(t) avec x(t) < 0	X(p)
A	$\frac{A}{p}$
at	$\frac{a}{p^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

$$S_2(p) = \frac{1}{p^2-4}$$

je factorise le dénominateur :

$$S_2(p) = \frac{1}{(p+2)(p-2)}$$

je décompose S_2 sous la forme d'un somme :

$$S_2(p) = \frac{\alpha}{p+2} + \frac{\beta}{p-2}$$

puis par identification je retrouve α et β :

$$S_2(p) = \frac{\alpha(p-2)+\beta(p+2)}{p^2-4} = \frac{(\alpha+\beta)p + 2(\beta-\alpha)}{p^2-4}$$

donc $(\alpha+\beta)p + 2(\beta-\alpha) = 1 \ \forall p$ et $\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ 2(\beta-\alpha)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-\frac{1}{4} \\ \beta=\frac{1}{4} \end{cases}$

et par linéarité $\boxed{s_2(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{2t}} = \frac{1}{4}(e^{2t} - e^{-2t})$

Scanned with CamScanner