5. Exemples de S L CI

5.1 - $x(t) \longrightarrow$ [ressort + amortisseur] $\longrightarrow y(t)$

Q.1. linéarité et théorème de la dérivée de la T.L. :

$$-f \cdot p \cdot Y(p) + k(X(p) - Y(p)) = 0 \qquad \text{avec } y(0)=0$$

Q.2. $k \cdot X(p) = fp\, Y(p) + k\, Y(p)$

$$(fp + k)\, Y(p) = k\, X(p)$$

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = H(p) = \frac{k}{fp+k}$$

on reconnait une fonction de transfert du 1er ordre et on la met sous forme canonique $\frac{K}{1+Tp}$:

$$\boxed{H(p) = \frac{1}{1 + \frac{f}{k}p}}$$ 1er ordre avec $K = 1$ sans unité

$$\boxed{T = \frac{f}{k}}$$ en s

Q.3. réponse indicielle $\Rightarrow x(t) = 1$ entrée échelon unitaire

on a alors $X(p) = \frac{1}{p}$ d'où $Y(p) = \frac{1}{1 + \frac{f}{k}p} \cdot \frac{1}{p}$

par décomposition en éléments simple :

$$Y(p) = \frac{\alpha}{1 + \frac{f}{k}p} + \frac{\beta}{p}$$

alors

$$Y(p) = \frac{\alpha p + \beta\left(1 + \frac{f}{k}p\right)}{\left(1 + \frac{f}{k}p\right) \cdot p} = \frac{\left(\alpha + \beta\frac{f}{k}\right)p + \beta}{\left(1 + \frac{f}{k}p\right) \cdot p}$$

Scanned with CamScanner

et par identification : $\begin{cases} \alpha + \beta \frac{f}{k} = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$

d'où $\alpha = -\frac{f}{k}$ ainsi $Y(p) = \frac{-\frac{f}{k}}{1+\frac{f}{k}p} + \frac{1}{p}$

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{k}{f}}$$

d'où $\boxed{y(t) = 1 - e^{-\frac{k}{f}t}}$

étude de la fonction pour son tracé :

$\dot{y}(t) = \frac{k}{f} e^{-\frac{k}{f}t}$ d'où $y(0) = \frac{k}{f}$ et $y(t) > 0$

$y(0) = 0$; $y(T) = 1 - e^{-1}$ avec $T = \frac{f}{k}$; $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 1$

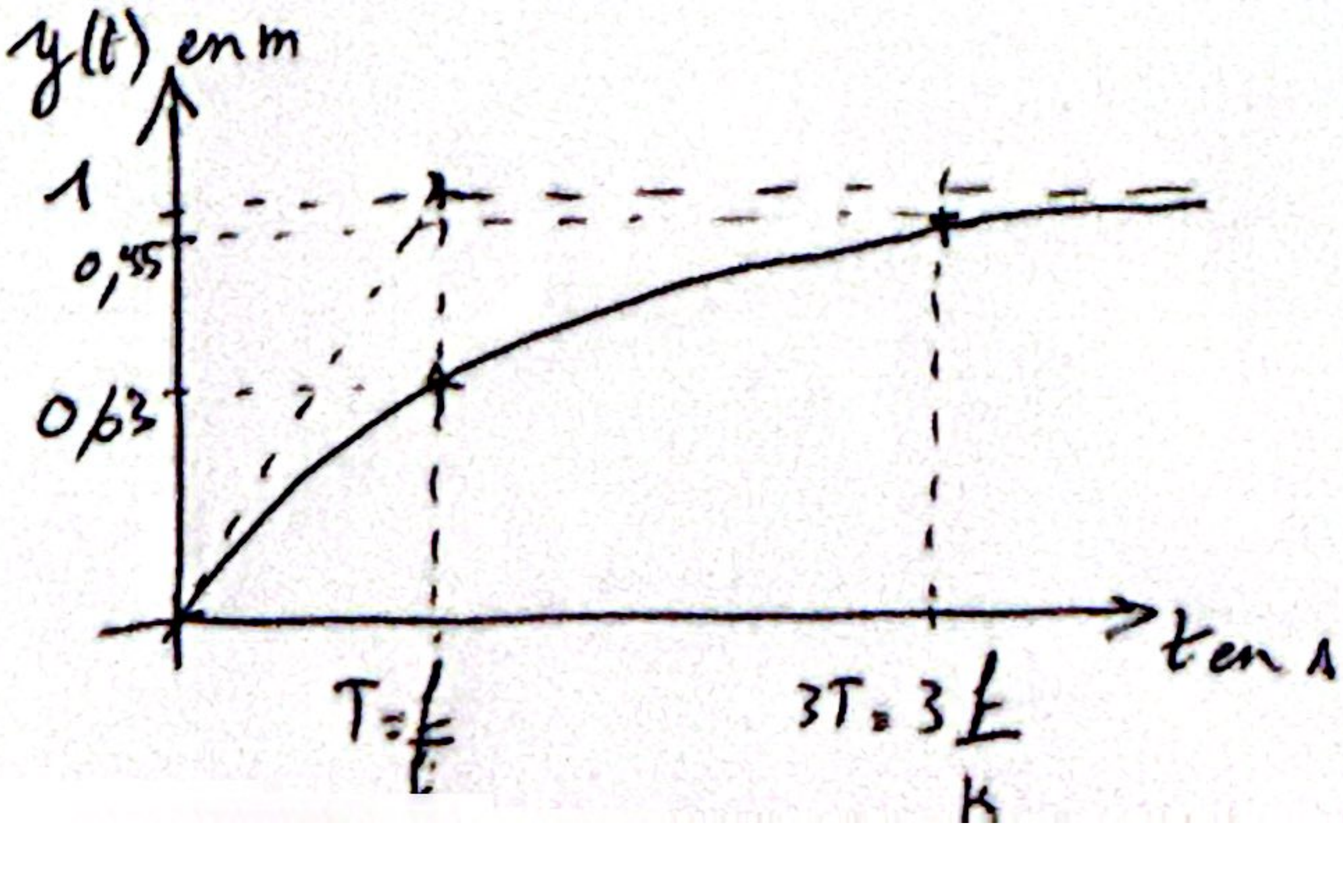
$y(T) \simeq 0{,}63$

on cherche $tr5\%$ tel que $y(tr5\%) = 1 - \overline{0{,}05}^{5\%}$

$\Rightarrow 1 - e^{-\frac{tr5\%}{T}} = 0{,}95 \quad \Rightarrow e^{-\frac{tr5\%}{T}} = +0{,}05$

$\rightarrow tr5\% = -\ln(0{,}05).T \simeq 3T$

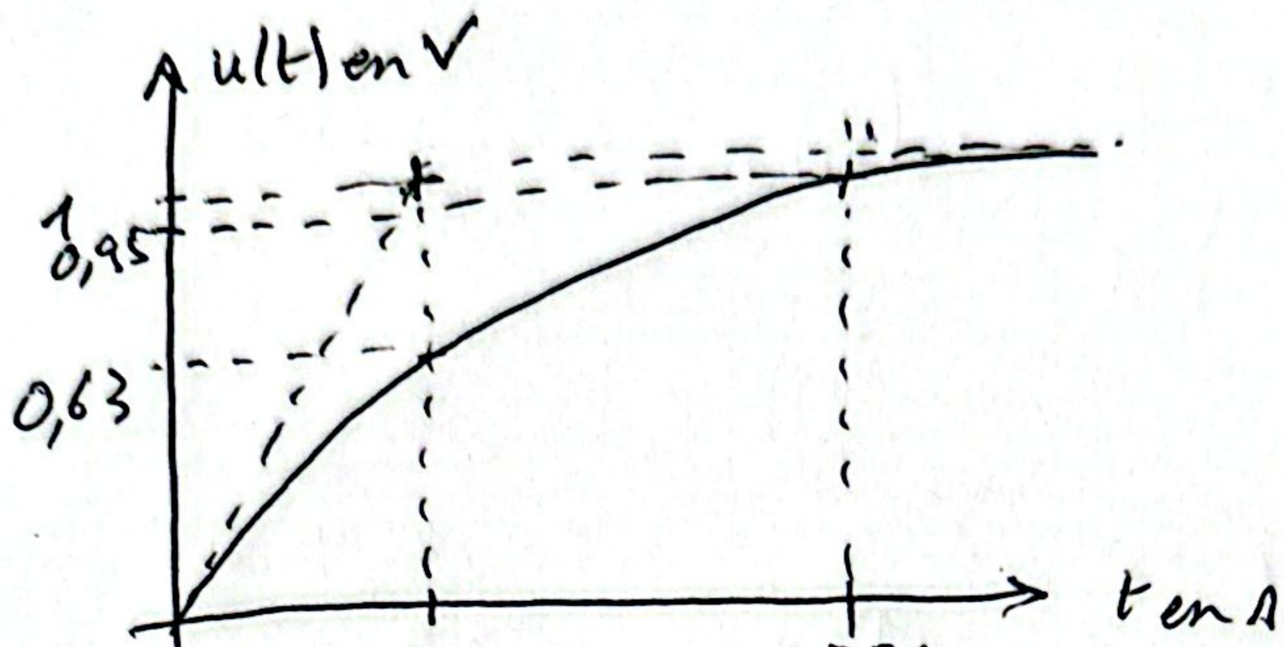
t	0	T	$3T$	$+\infty$
$\dot{y}(t)$	$\frac{1}{T}$	$+$		0
$y(t)$	0	~~0,63~~	$0{,}95$	



5.2. $e(t)$ → [circuit RC] → $v(t)$ 1er ordre

idem 5.1. (analogie mécanique/électrocinétique)

Q.3.



$K = 1$

$T = RC$

5.3. $g(t)$ → [masse + ressort + amortisseur] → $x(t)$

Q.1. $G(p) - f\,p\,X(p) - k\,X(p) = M p^2 X(p)$ avec $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ CI. nulles

Q.2. $X(p)\,(M p^2 + f p + k) = G(p)$

$$H(p) = \frac{X(p)}{G(p)} = \frac{1}{M p^2 + f p + k}$$

sous forme canonique du 2nd ordre:

$$H(p) = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{f}{k} p + \frac{M}{k} p^2} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

par identification $K = \frac{1}{k} = 10^{-4}\ m.N^{-1}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = 10\ rad.s^{-1}$$

$$\xi = \frac{\omega_0}{2} \frac{f}{k} = \frac{f}{2\sqrt{kM}} = 2$$

Scanned with CamScanner

Q.3. réponse indicielle d'un second ordre avec $\xi > 1$

on peut utiliser les notations conventionnelles du cours ou traiter les calculs avec les valeurs numériques des coefficients.

pour $g(t) = 1\mathcal{N}$ (réponse indicielle) $\Rightarrow G(p) = \frac{1}{p}$

$$X(p) = H(p)\,G(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \cdot \frac{1}{p} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{p}$$

$$X(p) = \frac{10^{-2}}{\underbrace{p^2 + 40p + 100}} \cdot \frac{1}{p}$$

$\Delta = 40^2 - 4\times 100 = 1200 \Rightarrow \Delta > 0$

décomposition en éléments simples:

$$X(p) = \frac{\alpha}{p - p_1} + \frac{\beta}{p - p_2} + \frac{\gamma}{p}$$

avec $p_1 = \frac{-40 + \sqrt{1200}}{2} = -10(2 - \sqrt{3})$ et $p_2 = -10(2 + \sqrt{3})$

puis pour déterminer α, β, γ :

$$X(p) = \frac{\alpha(p - p_2)p + \beta(p - p_1)p + \gamma(p - p_1)(p - p_2)}{(p - p_1)(p - p_2)\,p}$$

donc $(\alpha + \beta + \gamma)p^2 + (\alpha p_2 + \beta p_1 + \gamma(p_1 + p_2))p + \gamma p_1 p_2 = 10^{-2}$ $\forall p$

d'où
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha p_2 + \beta p_1 + \gamma(p_1 + p_2) = 0 \\ \gamma p_1 p_2 = 10^{-2} \Rightarrow \gamma = 10^{-4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 10^{-4} = 0 \\ \alpha p_2 + \beta p_1 + 40.10^{-4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\beta - 10^{-4} \\ \beta(p_1 - p_2) - (40 + p_2)10^{-4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta - 10^{-4} \\ \beta = \dfrac{+(40 - 10(2+\sqrt{3}))\cdot 10^{-4}}{-10(2+\sqrt{3}) + 10(2+\sqrt{3})} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) 10^{-4} = -\dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}} \cdot 10^{-4} \\ \beta = \dfrac{20 - 10\sqrt{3}}{20\sqrt{3}} \cdot 10^{-4} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) \cdot 10^{-4} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

on obtient finalement :

$$x(t) = \alpha e^{+p_1 t} + \beta e^{+p_2 t} + \gamma$$

$$\boxed{x(t) = 10^{-4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}} e^{-10(2-\sqrt{3})t} + \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} e^{-10(2+\sqrt{3})t}\right)}$$

on obtient le tracé par étude de fonction pour laquelle on doit vérifier $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 1.K = 10^{-4} m$

$$x(0) = 10^{-4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 10^{-4}\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 0 \quad \text{O.K.}$$

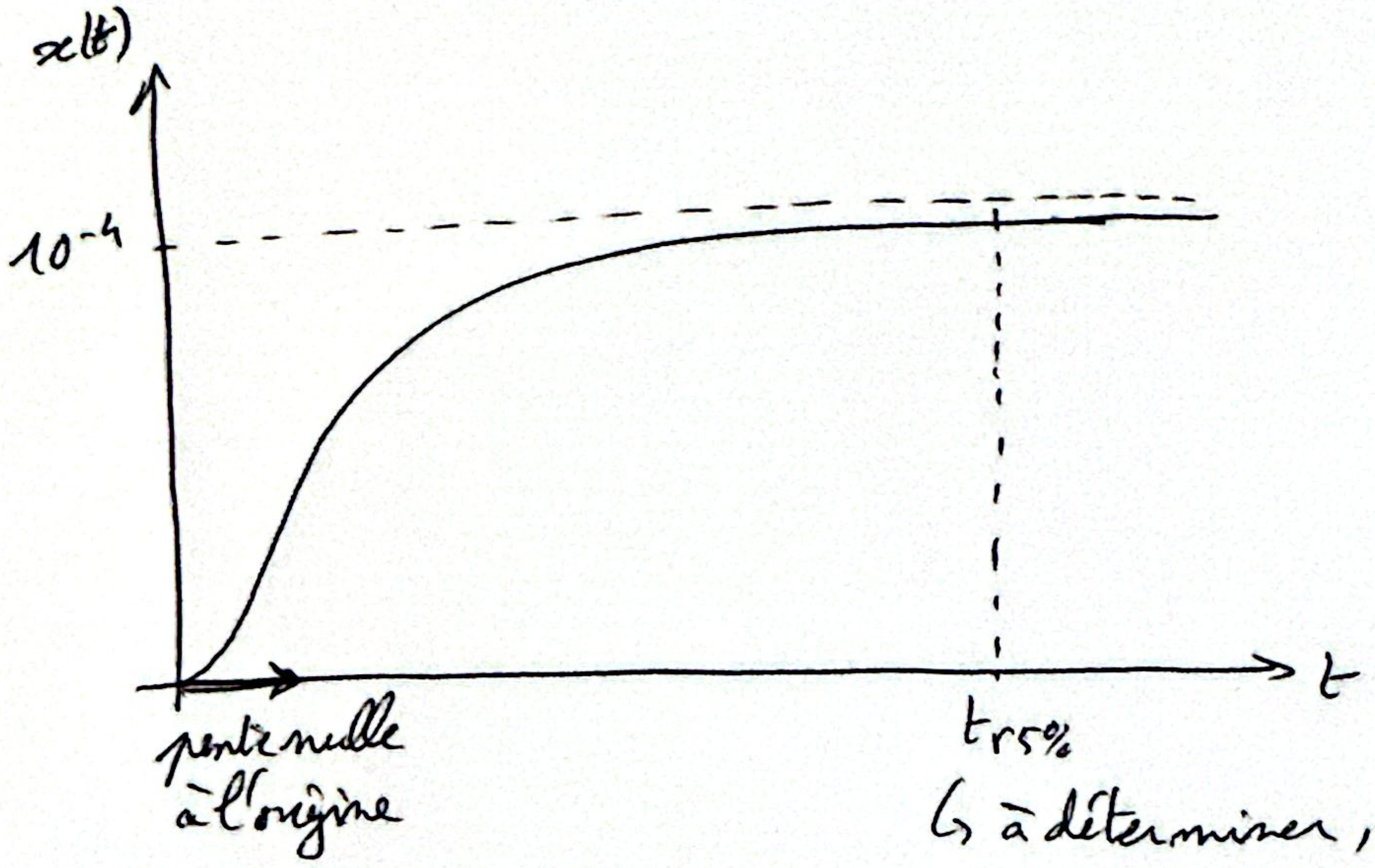
$$\dot{x}(t) = 10^{-4}\left(\frac{(\sqrt{3}+2)10(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} e^{-10(2-\sqrt{3})t} + \frac{(2-\sqrt{3})(-10(2+\sqrt{3}))}{2\sqrt{3}} e^{-10(2+\sqrt{3})t}\right)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{10^{-3}}{2\sqrt{3}}\left((2^2 - \sqrt{3}^2) e^{p_1 t} - (2^2 - \sqrt{3}^2) e^{p_2 t}\right)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{10^{-3}}{2\sqrt{3}}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right) \quad \text{on vérifie bien } \dot{x}(0) = 0$$

et $|p_1| < |p_2|$ donc $e^{p_1 t} - e^{p_2 t} > 0 \quad \forall t > 0$

x est donc une fonction strictement croissante et la courbe a donc l'allure suivante :



↳ à déterminer, tel que :

$x(t_{r5\%}) = 0{,}95.10^{-4}$ (une résolution numérique est nécessaire, voire l'abaque du temps de réponse réduit à la fin du cours)