

Programme de colle - semaine 03 du 02/10/2023 au 08/10/2023

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un (*).

Connaître la démonstration, c'est bien. Savoir énoncer proprement la propriété c'est mieux.

Quoi qu'il arrive, ne pas passer plus de 20 minutes sur la question de cours.

1. Les complexes

Dans cette première colle, uniquement des exercices avec des petits calculs de base utilisant la forme algébrique, la forme exponentielle ou l'angle moitié.

- Forme algébrique d'un complexe. Partie réelle, imaginaire.
- Opérations de base : somme, produit, inverse, conjugué.
- Module. Propriétés : module d'un produit (*), quotient. Inégalité triangulaire (*), cas d'égalité.
- Exponentielle d'un imaginaire pur, $e^{i(\theta+\theta')} = \dots$, formules d'Euler, de Moivre.
- Argument, exponentielle d'un complexe quelconque (pas d'exercice fait). Forme trigonométrique (ou exponentielle) d'un complexe non nul.
- Angle moitié, mise sous forme trigonométrique de $1 \pm e^{i\theta}$ ou $e^{ia} \pm e^{ib}$: pas à connaître par cœur mais à savoir retrouver rapidement.
- **CE QUI SUIT N'A PAS ÉTÉ VU** : linéarisation, antilinéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$, $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$ et autres sommes, racines carrées sous forme algébrique, équation du second degré à coefficients complexes, racines n^{es} .

2. Primitives et intégrales

Assez peu d'exercices faits (surtout en début de semaine). Donner à tout le monde un petit calcul d'intégrale (IPP ou changement de variable) ou simplement une recherche de primitive.

- Toute fonction continue sur un intervalle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ admet des primitives (admis). Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle, connaissant l'une d'entre elles.
- Brève extension des notions de continuité, dérivabilité, primitive aux fonctions à valeurs complexes. Dérivée de $t \mapsto e^{mt}$ ($m \in \mathbb{C}$), utilisation pour trouver des primitives de $t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ ou $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- Définition de l'intégrale : si f est continue sur I (intervalle) et $a, b \in I$, on pose $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$, F étant une primitive de f . Cette définition est cohérente.

Avoir le réflexe de revenir à la définition si on ne sait pas quoi faire.

- Propriétés élémentaires de l'intégrale : relation de Chasles, linéarité, positivité (*), croissance.
Si $a \leq b$, alors $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ (*)
- Théorème fondamental de l'intégration (*) : $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .
- Intégration par parties (*). Changement de variable (*).
- Sur des exemples :
Primitive de $f : t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$, $c \neq 0$.
Primitive de $f : t \mapsto \frac{at+b}{t^2+ct+d}$: uniquement dans le cas où le dénominateur admet au moins une racine réelle (la fonction arctan n'a pas été vue).
- Sur un exemple, dérivation de $x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$ (formule pas au programme mais à savoir retrouver).