

## Programme de colle - semaine 05 du 16/10/2023 au 22/10/2023

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un (\*).

### 1 Les complexes (partie 2)

- Notions de base sur les complexes (opérations, forme trigonométrique, angle moitié)
- Transformations trigonométriques (linéarisation, antilinéarisation, transformation de somme en produit).  
Calcul de  $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$  (transformation de ces sommes en une expression réelle explicite).  
Pour toutes ces transformations, il n'y a pas d'expression explicite à connaître, mais la méthode doit être connue.
- Racines carrées d'un complexe : définition et calcul (sous forme algébrique) (\*). Tout complexe non nul a deux racines carrées opposées.  
Équation du second degré à coefficients complexes.
- Racines  $n^{\text{es}}$  d'un complexe ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) : définition et expression (\*).  
Tout complexe non nul admet exactement  $n$  racines  $n^{\text{es}}$ .  
Racines  $n^{\text{es}}$  de l'unité. Notation  $\mathbb{U}_n$ .
- **À titre indicatif** (vu en cours mais ne pas interroger dessus) : Utilisation des complexes en géométrie.  
Interprétation du module et de l'argument de  $\frac{c-a}{b-a}$ . Caractérisation de l'alignement et de l'orthogonalité.  
Transformation  $z \mapsto az + b$  ( $a \in \mathbb{C}^*$ ), interprétation géométrique. Cas particuliers  $a = 1$ ,  $a \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ .

### 2 Fonctions polynômiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ ( $= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ )

- C'est le tout début, nous n'avons fait presque aucun exercice. Se limiter aux exercices sur les notions de base (coefficients, degré, racine).
- La définition formelle des polynômes n'a pas été vue. Pour l'instant les notions de **fonction polynômiale** et **polynôme** sont confondues.
- Définition d'une fonction polynômiale (avec quantificateurs et symbole  $\sum$ ).  
Notations  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  ou  $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$  ou  $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k$  (avec  $(a_k)$  une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$  presque nulle).  
La somme, le produit de fonctions polynômiales sont des fonctions polynômiales.
- Unicité des coefficients : 2 versions ont été données (ne pas demander la démonstration mais les propriétés doivent être correctement énoncées, en plaçant bien les quantificateurs) :
  - Si deux fonctions polynômiales sont égales, alors leurs suites de coefficients sont égales.
  - Si une fonction polynômiale est nulle, alors tous ses coefficients sont nuls.
- Coefficients de la somme, du produit.  
Degré d'un polynôme. Degré de la somme, du produit (\*). Coefficient dominant, polynôme unitaire.  
Si le produit de deux fonctions polynômiales est nul, alors l'une des deux est nulle (écrire avec des quantificateurs).
- Racine d'une fonction polynômiale. Caractérisation en terme de factorisation (\*).  
Factorisation d'un polynôme dont on connaît plusieurs racines **distinctes**.  
Tout polynôme de degré au plus  $n$ , ayant au moins  $n + 1$  racines distinctes est nul.  
Tout polynôme ayant une infinité de racines est nul.

**Tout ce qui n'apparaît pas explicitement ci-dessus n'a pas encore été vu.** En particulier :

- Notations  $X$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$ .
- Théorème de D'Alembert-Gauss. Factorisation complète dans  $\mathbb{C}$  (a fortiori dans  $\mathbb{R}$ ).
- Factorisation de  $x^n - 1$ .
- Racine simple/multiple.
- Polynôme irréductible. Division euclidienne, arithmétique. Relations entre coefficients et racines.

### 3 Exercices

Les exercices suivants ont été cherchés et peuvent être posés (tout ou partie) comme premier exercice (certains incluent une question de cours).

**Si l'exercice s'éternise trop et n'est manifestement pas compris/travaillé, passer à autre chose !**

#### 1. Banque CCINP exercice 84

- Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Donner, en justifiant, les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^n = 1$  et préciser leur nombre.
- En déduire, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $(z+i)^n = (z-i)^n$  et démontrer que ces nombres sont réels.

#### 2. Banque CCINP exercice 89

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . On pose  $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ .

- On suppose  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .  
Déterminer le module et un argument du complexe  $z^k - 1$ .
- On pose  $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$ . Montrer que  $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$ .

- Montrer que la fonction polynômiale  $P : x \mapsto 2x^3 - 6x + 1$  a trois racines réelles distinctes (qu'on ne cherchera pas à calculer). On les note  $\alpha, \beta, \gamma$ .
  - Calculer  $\alpha\beta\gamma, \alpha + \beta + \gamma, \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ .