MPSI

Programme de colle - semaine 06 du 06/11/2023 au 12/11/2023

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un $(*)$.

1 Fonctions polynômiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

- La définition formelle des polynômes n'a pas été vue. Pour l'instant les notions de **fonction polynômiale** et **polynôme** sont confondues.
- Définition d'une fonction polynômiale (avec quantificateurs et symbole $\sum$).
  Notations $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ ou $\sum\limits_{k \geqslant 0} a_k x^k$ ou $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k$ (avec (a_k) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ presque nulle).
  La somme, le produit de fonctions polynômiales sont des fonctions polynômiales.
- Unicité des coefficients : 2 versions ont été données (ne pas demander la démonstration mais les propriétés doivent être correctement énoncées, en plaçant bien les quantificateurs) :
  - Si deux fonctions polynômiales sont égales, alors leurs suites de coefficients sont égales.
  - Si une fonction polynômiale est nulle, alors tous ses coefficients sont nuls.
- Coefficients de la somme, du produit.
  Degré d'un polynôme. Degré de la somme, du produit $(*)$. Coefficient dominant, polynôme unitaire.
  Si le produit de deux fonctions polynômiales est nul, alors l'une des deux est nulle (écrire avec des quantificateurs).
- Racine d'une fonction polynômiale. Caractérisation en terme de factorisation (*).
  Factorisation d'un polynôme dont on connaît plusieurs racines **distinctes**.
  Tout polynôme de degré au plus n, ayant au moins $n+1$ racines distinctes est nul.
  Tout polynôme ayant une infinité de racines est nul.
- Théorème de D'Alembert-Gauss (admis). Factorisation complète dans $\mathbb{C}$ **(pas celle dans $\mathbb{R}$)**.
- Factorisation complexe de $x^n - 1$.

Notions pas vues :

- Notations X, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$.
- Racine simple/multiple.
- Polynôme irréductible. Division euclidienne, arithmétique. Relations entre coefficients et racines.

2 Théorie des fonctions

C'est le tout début, très peu d'exercices faits. Se limiter à des questions simples du type "f est-elle injective / surjective / bijective ?" ou une recherche d'image directe / réciproque.

- Pas de définition précise de la notion de fonction : une fonction de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. On ne distingue pas les notions de fonction et d'application.
- Image directe, notation $f(A)$. Image réciproque, notation $f^{-1}(B)$ indépendamment de la notion de bijection.
- Composition. Application identique. Restriction, prolongement
- Application injective, surjective, bijective. Composition de deux applications injectives $(*)$, surjectives $(*)$, bijectives.
- Réciproque d'une bijection. Réciproque d'une composée.
- Autres notions évoquées (pas d'exercice fait) : famille indexée par un ensemble non vide, fonction indicatrice d'une partie.

3 Exercices

Les exercices suivants ont été cherchés et peuvent être posés (tout ou partie) comme premier exercice (certains incluent une question de cours).

1. **D'après CCINP Exercice 84**

   Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On considère l'équation $(E) : (z+i)^n = (z-i)^n$, d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

   a) Justifier, sans la résoudre, que (E) a au plus $n-1$ solutions dans $\mathbb{C}$.

   b) On admet que les solutions de (E) sont $\dfrac{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}, \quad k \in [\![1, n-1]\!]$.

   Donner la factorisation de la fonction polynomiale $P : z \longmapsto (z+i)^n - (z-i)^n$.

2. a) Montrer que la fonction polynômiale $P : x \longmapsto 2x^3 - 6x + 1$ a trois racines réelles distinctes (qu'on ne cherchera pas à calculer). On les note α, β, γ.

   b) Calculer $\alpha\beta\gamma$, $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$.

3. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$

   a) Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f\left(\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[\right)$

   b) Déterminer $f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[\right)$

   c) Soit $g : \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow &]0,1] \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

   Montrer que g est bien définie et qu'elle est bijective. Déterminer l'expression de sa réciproque.

4. Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.
   Soit $h = g \circ f$

   a) **Première possibilité**

      i) Redonner la définition de "f est injective", et définir avec des quantificateurs "f n'est pas injective".

      ii) Montrer que si f et g sont injectives, alors h est injective.

      iii) Montrer que si h est injective, alors f est injective.

   b) **Deuxième possibilité**

      i) Redonner la définition de "f est surjective", et définir avec des quantificateurs "f n'est pas surjective".

      ii) Montrer que si f et g sont surjectives, alors h est surjective.

      iii) Montrer que si h est surjective, alors g est surjective.