MPSI

Programme de colle - semaine 07 du 13/11/2023 au 19/11/2023

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un $(*)$.

1 Théorie des fonctions

Exercices sur injectivité, surjectivité, bijection, réciproque, image directe, image réciproque.

2 Fonctions usuelles

- Théorème de la bijection (aussi appelé corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) :
  Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ strictement monotone (I : intervalle)
  - $f(I)$ est un intervalle de même nature que I, dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I.
  - f définit une bijection de I vers $f(I)$.
  - f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f.

  (résultats admis)
- Courbe de f^{-1}. Dans le cas où f est dérivable, étude de la dérivabilité de f^{-1} et expression de sa dérivée (résultats admis mais donner l'interprétation géométrique)
- Définition de arcsin, arccos, arctan. En particulier, il ne faut pas hésiter sur leurs ensembles de départ et d'arrivée. Variations, parité de arcsin $(*)$, de arctan.
- Ensemble de dérivabilité et dérivée des fonctions trigonométriques réciproques
  $(*)$ (incluant la simplification $\cos(\arcsin x) = \cdots$ pour la dérivée de arcsin)
- Primitives et intégrales de $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{P(x)}$, où P est un polynôme de degré 2 qui n'a pas de racine réelle.
- Fonctions hyperboliques ch, sh, th : expression, dérivée, variations.
  La seule formule exigible est $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme (mais la recherche de leur expression peut faire l'objet d'un exercice)
- On pourra donner un calcul d'intégrale faisant intervenir les fonctions trigonométriques réciproques (avec IPP, changement de variable,...).

3 Exercices

1. Soit $f : x \longmapsto \arccos(\cos x)$ (possible aussi avec $\arcsin(\sin x)$ et $\arctan(\tan x)$) mais non cherchés)
   a) Déterminer l'ensemble de définition de f, sa parité, sa périodicité pour restreindre l'étude à un intervalle I dans lequel l'expression de f est simple.
   b) Déterminer $f\left(\dfrac{23\pi}{19}\right)$ sous la forme $\dfrac{a\pi}{b}$, où a et b sont deux entiers.
   c) Tracer la courbe de f en expliquant pas à pas la construction de la courbe.

2. Soit $f : x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f'. Que peut-on en déduire ?

   L'exercice avec $\arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$ a également été fait.

3. Montrer que la fonction th est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer, puis déterminer l'expression de sa réciproque.