MPSI

Programme de colle - semaine 08 du 20/11/2023 au 26/11/2023

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un $(*)$.

1 Calcul matriciel

- Généralités : Matrice. Matrice ligne/colonne/carrée. Matrice diagonale, triangulaire, élémentaire. Notations $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Opérations vectorielles (somme, multiplication par un scalaire). Propriétés
- Produit matriciel : **expression des coefficients du produit**. Propriétés du produit, en particulier l'associativité : $A(BC) = (AB)C$ dès que ces expressions sont définies $(*)$.
  Matrice identité, matrice scalaire. Puissances d'une matrice carrée. Règles de calcul quand les matrices commutent (formule du binôme de Newton) (démonstration pas refaite en détail dans le cadre matriciel). Exemples de calcul des puissances d'une matrice scalaire+nilpotente.
- Savoir transformer un système de suites récurrentes linéaires scalaires en une suite récurrente matricielle $X_{n+1} = AX_n$.
- Matrice inversible. Inverse d'un produit.
  Admis : Si $AB = I_n$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $BA = I_n$.
  Aucune autre connaissance exigible (pour l'instant) sur les matrices inversibles : ni de méthode générale d'étude d'inversibilité, ni a fortiori de calcul d'inverse. Une indication devra être donnée pour tout calcul d'inverse.
- Produit (puissance, inverse) de matrices diagonales $(*)$. Le produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure), expression des coefficients diagonaux $(*)$. Produit de matrices élémentaires (pas d'exercice fait).
- Transposée d'une matrice (notée $A^\top$). Transposée d'un produit $(*)$, de l'inverse. Matrice symétrique, antisymétrique.
- Trace d'une matrice, propriétés. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ dès que AB et BA sont définies $(*)$.

2 Exercices

1. a) Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (possibilité de changer les coefficients)
   Calculer B^2, B^3. En déduire B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   b) On pose $M = 2I_3 + B$. Calculer M^n explicitement pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c) On considère les suites (u_n), (v_n), (w_n) définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = 2w_n \end{cases}$$
   On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$
   Exprimer X_{n+1} en fonction de M et X_n.
   d) En déduire X_n explicitement (sans puissance matricielle), puis u_n, v_n, w_n.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (possibilité de changer la matrice)
   Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$
   En déduire que A est inversible, et déterminer A^{-1}

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

   a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

      Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

   b) Soit $D = P^{-1}AP$. Calculer D puis calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation exprimant D^n en fonction de A^n, P et P^{-1}.

   d) En déduire A^n à partir des matrices connues.

   e) Soit (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$

      Donner une méthode permettant de calculer explicitement ces deux suites. *On n'effectuera pas les calculs.*

4. a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et J la matrice dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
   Calculer J^2 puis conjecturer une expression pour J^n, $n \in \mathbb{N}$ puis la démontrer.

   b) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients diagonaux valent 2, les autres 1.
   Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c) Montrer que A est inversible et donner A^{-1}. *On pourra considérer $xI + yJ$.*